1. $i(x+2i)^2$ 이 실수가 되는 실수 x 의 값을 정하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① ± 1 ② ± 2 ③ ± 3 ④ ± 4 ⑤ ± 5

해설

$i(x+2i)^2 = i(x^2+4ix-4) = x^2i-4x-4i$
$\quad = -4x+(x^2-4)i$
실수가 되려면 허수부분이 0이면 된다.
$\therefore\ x^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 2$

2. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$
$=(x^2-x-2)+(x^2-3x+2)i$
순허수가 되려면 (실수 부분)=0, (허수 부분)$\neq 0$이어야 하므로
$x^2-x-2=0$, $x^2-3x+2\neq 0$
(i) $x^2-x-2=0$ 에서 $(x+1)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$
(ii) $x^2-3x+2\neq 0$ 에서 $(x-1)(x-2)\neq 0$
$\therefore\ x\neq 1$ 또는 $x\neq 2$
따라서 (i), (ii)에 의하여 $x=-1$

3. $(1-3i)x+(3+2i)y=1+8i$를 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(1-3i)x+(3+2i)y=1+8i$,
$(x+3y)+(-3x+2y)i=1+8i$ 에서
복소수의 상등에 의하여
$x+3y=1,\ -3x+2y=8$ 이고
연립하여 풀면 $y=1,\ x=-2$
$\therefore\ x+y=-1$

4. 등식 $\left(\frac{2+i}{1+\sqrt{2}i}\right)\left(\frac{1-4i}{1-\sqrt{2}i}\right)=a+bi$ 를 만족하는 실수 a, b 에 대하여 $a-3b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a-3b=9$

해설

$$(\text{좌변})=\frac{(2+i)(1-4i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}$$
$$=\frac{2-8i+i-4i^2}{1-2i^2}$$
$$=\frac{6-7i}{3}=2-\frac{7}{3}i \text{ 이므로}$$
$$2-\frac{7}{3}i=a+bi$$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$$a=2,\ b=-\frac{7}{3}$$
$$\therefore\ a-3b=2-3\times\left(-\frac{7}{3}\right)=2+7=9$$

5. $x = 2009,\ y = 7440$ 일 때, $\dfrac{x+yi}{y-xi} + \dfrac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ -1 ④ i ⑤ $-i$

해설

주어진 식을 정리하면

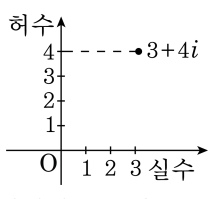
$$\frac{x+yi}{y-xi} + \frac{y-xi}{x+yi}$$

$$= \frac{(x+yi)^2 + (y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)}$$

$$= \frac{x^2 + 2xyi - y^2 + y^2 - 2xyi - x^2}{xy + y^2 i - x^2 i + xy} = 0$$

따라서 구하는 값은 0

6. 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)를 실수의 순서쌍 (a, b)로 나타내어 좌표평면 위에 표시할 수 있다. 예를 들어 $3+4i$를 $(3, 4)$로 나타내면 다음 그림과 같이 표시할 수 있다. $z = 1 + i$일 때, 0, z, z^2 이 나타내는 점을 각각 A, B, C 라 할 때, $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인가? (단, 가장 정확하게 표시한 것을 하나만 고른다.)



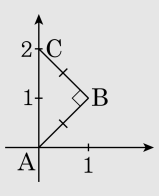
① 정삼각형 ② 이등변삼각형

③ 직각삼각형 ④ 직각이등변삼각형

⑤ 답 없음

해설

$z = 1 + i$ $z^2 = 2i \Rightarrow$ $B(1, 1)$, $C(0, 2)$



$\Rightarrow$ 직각이등변삼각형

※ 이와 같이 복소수의 실수부와 허수부를 순서쌍으로 좌표평면에 나타내는 것을 복소평면이라 한다.

7. n이 홀수일 때, $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n+1}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{4n+1}$을 간단히 하면?

① $-2i$ ② $-i$ ③ $2i$ ④ i ⑤ 0

해설

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{2i}{2}=i$

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{-2i}{2}=-i$

$i^{2n+1}+(-i)^{4n+1}$ ($n=2k-1$ 대입)

$i^{2(2k-1)+1}+(-i)^{4(2k-1)+1}$

$=i^{4k-1}-i$

$=-i-i=-2i$

8. $f(x)=\dfrac{x}{1-i}$, $g(x)=\dfrac{x}{1+i}$ 인 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $\{f(1+i)\}^{2006}+\{g(1-i)\}^{2007}$ 의 값은?

① -2 ② $-1+i$ ③ -1

④ $-1-i$ ⑤ 2

해설

$$f(1+i)=\frac{1+i}{1-i}=i$$

$$g(1-i)=\frac{1-i}{1+i}=-i$$

$$\therefore (\text{준식})=(i)^{2006}+(-i)^{2007}$$

$$=i^2+(-i)^3 \ (\because i^{2004}=(-i)^{2004}=1)$$

$$=-1+i$$

9. $z = \dfrac{1-i}{1+i}$ 일 때, $z^{100} + \dfrac{1}{z^{100}}$ 의 값을 구하여라.($i = \sqrt{-1}$)

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$$z = \frac{1-i}{1+i} = -i$$

$$z^{100} + \frac{1}{z^{100}} = (-i)^{100} + \frac{1}{(-i)^{100}} = 1 + 1 = 2$$

10. $1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}$을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}$$
$$=\{1+(-i)+(-1)+i\}+\{1+(-i)+(-1)+i\}+1$$
$$=1$$

11. 복소수 z와 그의 켤레복소수 $\bar{z}$에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① $z+\bar{z}$는 실수이다.　② $z=\bar{z}$이면 z는 실수이다.

③ $z\bar{z}=1$이면 $z^2=1$이다.　④ $z\bar{z}=0$이면 $z=0$이다.

⑤ $z\bar{z}$는 실수이다.

해설

복소수 z와 그의 켤레복소수를 각각
$z=a+bi$, $\bar{z}=a-bi$ (a, b는 실수)라 하면

① $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (참)

② $z=\bar{z} \Leftrightarrow a+bi=a-bi$
$\Leftrightarrow 2bi=0$
$\Leftrightarrow b=0$(참)

③ $z\bar{z}=a^2+b^2=1 \Rightarrow z^2=a^2-b^2+2abi \neq 1$ (거짓)
(반례) $a=0$, $b=1$ 일 때, $z^2=-1$

④ $z\bar{z}=a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0$, $b=0$ (참)

⑤ $z\bar{z}=a^2+b^2$ (참)

12. 두 복소수 α, β 에 대하여 $\alpha+\overline{\beta}=2008i$ 일 때, $\overline{\alpha}+\beta$ 의 값은? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이고, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① 2008　② -2008

③ $2008i$　④ $-2008i$

⑤ 일정하지 않다.

해설

켤레복소수의 성질에서

$\alpha+\overline{\beta}=2008i$ 일 때

$\overline{\alpha+\overline{\beta}}=\overline{2008i}$

$\overline{\alpha}+\beta=-2008i$

13. $a-b<0$ 이고 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 일 때, $\sqrt{(a-b)^2}-|a+b|$ 를 간단히 하면?

① b　② $2b$　③ $a-2b$

④ $2a+b$　⑤ 0

해설

$a-b<0$, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 이므로 $a<0,\ b<0$

따라서 $a-b<0,\ a+b<0$ 이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(a-b)^2}-|a-b|&=|a-b|-|a+b|\\&=-(a-b)+(a+b)\\&=-a+b+a+b=2b\end{aligned}$$

14. $a < 0, b < 0$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$ ② $\dfrac{\sqrt{b}}{a} = \sqrt{\dfrac{b}{a^2}}$

③ $\sqrt{a^2 b^2} = ab$ ④ $\sqrt{-ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}i$

⑤ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}i$

해설

① $\sqrt{a^2 b} = -a\sqrt{b}$

② $\sqrt{\dfrac{b}{a^2}} = \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}} = \dfrac{\sqrt{b}}{-a}$

③ $\sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2}$
$= (-a)(-b) = ab$

④ $\sqrt{-ab} = \sqrt{-a}\sqrt{b}$
$= \sqrt{(-1)a}\sqrt{b}$
$= -\sqrt{-1}\sqrt{a}\sqrt{b}$
$= -\sqrt{a}\sqrt{b}i$

⑤ $\sqrt{ab} = -\sqrt{a}\sqrt{b}$

15. 복소수 $z = a + bi$ (단, a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$를 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대응시킬 때, $(2-3i)z$가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은?

① 원　② 아래로 볼록한 포물선

③ 위로 볼록한 포물선　④ 기울기가 음인 직선

⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$(2-3i)z = (2-3i)(a+bi)$$
$$= (2a+3b) + (2b-3a)i$$

$\therefore\ 2b-3a=0 \quad \therefore\ b = \frac{3}{2}a \Rightarrow$ 기울기가 양인 직선

16. $|x|(2+3i)+2|y|(1-2i)=6-5i$를 만족하는 실수 $x,\ y$의 순서쌍 $(x,\ y)$를 꼭짓점으로 하는 다각형의 넓이는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$(2|x|+2|y|)+(3|x|-4|y|)i=6-5i$

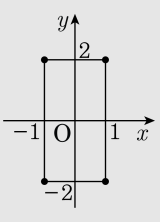
복소수의 상등에 의하여

$|x|+|y|=3,\ 3|x|-4|y|=-5$

두 식을 연립하면

$|x|=1,\ |y|=2$

$(x,\ y)\ \rightarrow\ (1,\ 2),\ (1,-2),\ (-1,\ 2),\ (-1,\ -2)$



$\therefore$ 직사각형의 넓이 $=2\times4=8$

17. 유리수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여 $(\sqrt{2}+i)^4 + a(\sqrt{2}+i)^3 + b(\sqrt{2}+i)^2 + c(\sqrt{2}+i) + d = 0$을 만족한다. 이 때, $a-b-c-d$의 값은? (단, $i^2 = -1$)

① -7 ② 3 ③ 1 ④ -1

해설

$(\sqrt{2}+i)^4 = -7 + 4\sqrt{2}i$, $(\sqrt{2}+i)^3 = -\sqrt{2} + 5i$,
$(\sqrt{2}+i)^2 = 1 + 2\sqrt{2}i$
$(-7+4\sqrt{2}i) + a(-\sqrt{2}+5i)$
$+b(1+2\sqrt{2}i) + c(\sqrt{2}+i) + d = 0$
$(-7-\sqrt{2}a + b + \sqrt{2}c + d)$
$+(4\sqrt{2} + 5a + 2\sqrt{2}b + c)i = 0$
$\therefore\ (-7+b+d) + (c-a)\sqrt{2} = 0,$
$(5a+c) + (4+2b)\sqrt{2} = 0$
$a,\ b,\ c,\ d$ 는 유리수이므로 $-7+b+d=0$:
$c-a=0,\ 5a+c=0,\ 4+2b=0$
$\therefore\ a=0,\ b=-2,\ c=0,\ d=9$
$\therefore\ a-b-c-d=-7$

18. $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$)일 때, $\alpha^t = b + ai$라 한다.

$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$일 때, $2\alpha^5(\alpha^t)^4$을 간단히 하면?

① $1+i$　② $1-i$　③ $2+i$

④ $2-i$　⑤ $\sqrt{3}+i$

해설

$\alpha = a + bi$, $\alpha^t = b + ai$이므로

$\alpha\alpha^t = (a+bi)(b+ai) = (a^2+b^2)i$

그런데 $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = a + bi$에서

$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \dfrac{1}{2}$　$\therefore\ \alpha\alpha^t = \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\right)i = i$

$\therefore$ (준식)$= 2\alpha(\alpha\cdot\alpha^t)^4 = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\cdot i^4 = \sqrt{3}+i$

19. 복소수들 사이의 연산 $*$가 다음과 같다고 하자.

$\alpha * \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta i$

이 때, $(1+2i) * z = 1$을 만족시키는 복소수 z는?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $1+i$　② $1-i$　③ $-1+i$

④ $-1-i$　⑤ i

해설

$z = a + bi$라 하면

$(1+2i) * z$

$= (1+2i) + (a+bi) + (1+2i)(a+bi)i$

$= (-a-b+1) + (a-b+2)i = 1$

$-a-b+1 = 1,\ a-b+2 = 0$

$a = -1,\ b = 1$

$\therefore\ z = -1+i$

20. 복소수 z 에 대하여 $f(z) = z\bar{z}$ ($\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (w 는 복소수)

보기

㉠ $f(z) \geqq 0$

㉡ $f(z+w) = f(z) + f(w)$

㉢ $f(zw) = f(z)f(w)$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢

④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉠, ㉢

해설

㉠ $z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면
$f(z) = z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \geqq 0$

㉡ $f(z+w) = (z+w) \cdot (\overline{z+w}) = (z+w) \cdot (\bar{z} + \overline{w})$
$= z\bar{z} + z\overline{w} + w\bar{z} + w\overline{w}$
$\neq z\bar{z} + w\overline{w} = f(z) + f(w)$

㉢ $f(zw) = zw \cdot (\overline{zw}) = zw \cdot \bar{z}\,\overline{w}$
$= z\bar{z} \cdot w\overline{w} = f(z)f(w)$

21. $A(n) = i^n + (-1)^n n$, $f(n) = A(1) + A(2) + \cdots + A(n)$ 이라 할 때, $f(10)+f(11)+f(12)+f(13)$ 의 값은? (단, n은 자연수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① $2i-2$ ② $2i+2$ ③ $2i-4$

④ $2i+4$ ⑤ $4i-2$

해설

$$
\begin{aligned}
f(10) &= (i-1) + (i^2+2) + (i^3-3) + \cdots + (i^{10}+10) \\
&= (i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{10}) \\
&\quad + (-1 + 2 - 3 + \cdots + 10) \\
&= (i-1) + (1+1+1+1+1) \\
&= i + 4 \\
f(11) &= f(10) + i^{11} - 11 \\
&= (i+4) + (-i-11) = -7 \\
f(12) &= f(11) + i^{12} + 12 \\
&= -7 + (1+12) = 6 \\
f(13) &= f(12) + i^{13} - 13 \\
&= 6 + (i-13) = i-7 \\
\therefore\ & f(10) + f(11) + f(12) + f(13) \\
&= (i+4) + (-7) + 6 + (i-7) = 2i-4
\end{aligned}
$$

22.

두 복소수 α, β 를 $\alpha = (3+4i)^{10} + (3-4i)^{10}$, $\beta = (3+4i)^{10} - (3-4i)^{10}$ 이라 할 때,α 는 (가) 이고, β 는(도) (나) 이다.

다음 중 (가), (나) 에 알맞은 것을 차례로 적으면?

① 양의 실수, 음의 실수 ② 음의 실수, 양의 실수

③ 실수, 순허수 ④ 순허수, 실수

⑤ 순허수, 순허수

해설

$\alpha = (3+4i)^{10} + (3-4i)^{10}$ 을 직접 계산하기는 어렵다.
따라서 $\overline{\alpha}$ 를 구하여 α 와 $\overline{\alpha}$ 의 관계를 살펴본다.

$$\begin{aligned}\overline{\alpha} &= \overline{(3+4i)^{10} + (3-4i)^{10}} \\ &= (\overline{3+4i})^{10} + (\overline{3-4i})^{10} \quad \Leftarrow \ \overline{z_1+z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2 \\ &= (3-4i)^{10} + (3+4i)^{10} \quad \Leftarrow \ \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2 \\ &= \alpha\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\alpha} = \alpha$ 이므로 α 는 실수이다.

$$\begin{aligned}\overline{\beta} &= \overline{(3+4i)^{10} - (3-4i)^{10}} \\ &= (\overline{3+4i})^{10} - (\overline{3-4i})^{10} \quad \Leftarrow \ \overline{z_1-z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2 \\ &= (3-4i)^{10} - (3+4i)^{10} \quad \Leftarrow \ \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2 \\ &= -\beta\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\beta} = -\beta$ 이므로 β 는 순허수이다.

23. 정수 n을 3으로 나눈 나머지를 a라 할 때, $f(n)=3+ai$ 로 나타내기로 한다. 이 때, $f(n-1)\cdot f(n)\cdot f(n+1)$ 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $21-27i$　② $21+27i$　③ $27+21i$
④ $27-21i$　⑤ $30+25i$

해설

a 는 0, 1, 2 중 어느 한 값이다.
n 을 3으로 나눈 나머지를 0이라 생각하면
$n-1$, $n+1$ 을 3으로 나눈 나머지는 각각 2, 1이므로
$f(n)=3$, $f(n-1)=3+2i$, $f(n+1)=3+i$
$\therefore\ f(n-1)\cdot f(n)\cdot f(n+1)$
$=(3+2i)\cdot 3\cdot(3+i)$
$=21+27i$
(n 을 3으로 나눈 나머지를 1이나 2로 생각하여도 $f(n-1)\cdot f(n)\cdot f(n+1)$ 의 결과는 같다.)

24. $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha^{99}+\beta^{99}$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}, \beta = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 에서 각각 양변에 2를 곱하고 1을 이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면

$\alpha^2-\alpha+1=0, \beta^2-\beta+1=0$

두 식에 각각 $\alpha+1, \beta+1$ 를 곱하면

$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0, (\beta+1)(\beta^2-\beta+1)=0$

$\therefore\ \alpha^3=-1, \beta^3=-1$

$\therefore \alpha^{99}+\beta^{99}=\left(\alpha^3\right)^{33}+\left(\beta^3\right)^{33}=-1-1=-2$

해설

$\alpha+\beta=1, \alpha\beta=1$ 이므로

α, β 를 두 근으로 하는 이차방정식을 만들면

$x^2-x+1=0$

$\therefore (x+1)\left(x^2-x+1\right)=\left(x^3+1\right)=0$

$\alpha^3=-1, \beta^3=-1$

$\therefore \alpha^{99}+\beta^{99}=\left(\alpha^3\right)^{33}+\left(\beta^3\right)^{33}=-1-1=-2$

25. 실수 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_9$가 $16 + x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_9 = 0$을 만족할 때, $\sqrt{x_1} \times \sqrt{x_2} \times \cdots \times \sqrt{x_9}$의 값들의 곱을 구하면?

① 8 ② 16 ③ 24 ④ 36 ⑤ 14

해설

$x_1 \times x_2 \times \ \cdots\ x_9 = -16$ 이므로
$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_9$중에서 음수의 개수는 홀수개이다.
이 중에서 음수인 것들은 그 절대값을 취하여
$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_m\ \ (y_i > 0)$ 이라 하고 양수인 것들은
$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \cdots,\ z_n\ (z_i > 0)$ 이라 하자.
그러면 $y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n = 16\ (m + n = 9,\ m : \text{홀수})$
i) $m = 4k + 1\ (k = 0,\ 1,\ 2)$ 일 때,

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sqrt{y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n} \cdot i^{4k+1} \\ &= \sqrt{16} \times (i^4)^k \times i \\ &= 4i\end{aligned}$$

ii) $m = 4k + 3\ (k = 0,\ 1)$ 일 때,

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sqrt{y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n} \cdot i^{4k+3} \\ &= \sqrt{16} \times (i^4)^k \times i^3 \\ &= -4i\end{aligned}$$

$\therefore$ i), ii)에서 $4i \times (-4i) = 16$