1. 다음 중 명제가 <u>아닌</u> 것은?

① $2(x-3)=-x+5+3x$

② $x>-1$이면 $x>0$이다.

③ x가 실수이면 $x^2 \geq 0$이다.

④ $x^2+4x-5=0$

⑤ $x=2$이면 $x^3=8$이다.

해설

참인 명제 : ③, ⑤
거짓인 명제 : ①, ②
④의 경우 $x=-5$ 또는 $x=1$일 때는 참이고, 그 외의 경우는 거짓이므로 명제가 아니다.

2. 다음 명제 중 참인 것의 개수를 구하면?

㉠ $2a^2 - 3b^2 = ab$ 이면 $a + b = 0$ 이다.
㉡ x 가 무리수 이면 x 는 무한소수이다.
㉢ 무한소수는 분수로 나타낼 수 없다.
㉣ x 가 3 의 배수이면 $x + 1$ 은 짝수이다.
㉤ 사각형의 대각선이 직교하면 마름모이다.

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 0개

해설

㉠ $2a^2 - ab - 3b^2 = 0$, $(a + b)(2a - 3b) = 0$
∴ $a + b = 0$ 또는 $2a - 3b = 0$ 이므로 거짓
㉡ 무리수는 순환하지 않는 무한소수이므로 참
㉢ 순환하는 무한소수는 유리수이므로 거짓
㉣ 반례 : $x = 6$ 일 때 $x + 1 = 7$(홀수)
㉤ 대각선이 직교하는 사각형이 모두 마름모는 아니다. 정사각형도 있다.
∴ ㉡만 참이다.

3. 다음 보기의 명제 중 '역'과 '대우'가 모두 참인 명제를 모두 고르면?

㉠ 자연수 n 에 대하여 n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.

㉡ 실수 x, y 에 대하여 $x+y>2$ 이면 $x>1$ 또는 $y>1$ 이다.

㉢ $\triangle ABC$ 에서 $\angle A = \angle B$ 이면 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이고, n 이 홀수이 면 n^2 도 홀수이므로 명제와 그 역이 모두 참 이다. 따라서 역과 대우 모두 참이다.
㉡ 역 '$x>1$ 또는 $y>1$ 이면 $x+y>2$ ' 에 서 $x=2,\ y=-3$ 일 때 $2-3<2$ 이므로 거짓 이다. 대우 '$x \le 1$ 이고 $y \le 1$ 이면 $x+y \le 2$ '는 참이다.
㉢ 역 '$\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이면 $\angle A = \angle B$ '는 $\angle A = \angle C$ 또는 $\angle B = \angle C$ 일 때도 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이므로 거짓이다. 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
따라서 역과 대우가 모두 참인 것은 ㉠뿐이다.

4. 조건 p는 조건 q이기 위한 어떤 조건인지 차례대로 바르게 나열한 것은? (단, x, y, z는 실수)

㉠ p : $x^2+y^2>0$, q : $x \neq 0$, $y \neq 0$
㉡ p : $x+z>y+z$, q : $x>y$

① ㉠ 필요조건 ㉡ 충분조건
② ㉠ 충분조건 ㉡ 필요조건
③ ㉠ 충분조건 ㉡ 필요충분조건
④ ㉠ 필요충분조건 ㉡ 필요충분조건
⑤ ㉠ 필요조건 ㉡ 필요충분조건

해설

㉠ 주어진 명제는 거짓이고 역은 참이다.
㉡ 주어진 명제와 역 모두 참이다.

5. 다음은 임의의 자연수 n에 대하여 『n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.』임을 증명한 것이다. 위의 증명 과정에서 (가), (나) 안에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

주어진 명제의 (가)를 구해보면 『n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.』이 때, n 이 짝수이면 $n =$ (나) (단, k 는 자연수) 따라서 $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ 이므로 n^2 도 짝수이다.

① 대우, $2k$ ② 대우, $4k$ ③ 대우, $2k+1$
④ 역, $2k+1$ ⑤ 역, $4k^2$

해설

'n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.' 의 대우는 'n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.'
∴ (가)–대우 n 이 짝수이면 $n = 2k$
∴ (나)– $2k$

6. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하고 $\sim p$가 $\sim q$이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P - Q = \varnothing$　② $P \cap Q = Q$　③ $P \cap Q = P$

④ $P^c = Q$　⑤ $P = Q$

해설

$\sim p$가 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 $\sim p \to \sim q$이고, 대우 $q \to p$는 참이다. 따라서, 두 진리집합 사이에는 $Q \subset P$가 성립하므로 $P \cap Q = Q$

7. 두 조건 p, q 가 다음과 같을 때, 항상 참인 명제는?

$p : 2x - 3 \geq 1 \quad q : \lvert x \rvert < 2$

① $p \to q$　　② $q \to p$　　③ $\sim p \to q$

④ $q \to \sim p$　　⑤ $\sim q \to \sim p$

해설

$P : x \geq 2$, $Q : -2 < x < 2$

$P \subset Q^c \leftrightarrow Q \subset P^c$

$\therefore\ p \to \sim q$(참) $\leftrightarrow$ $q \to \sim p$(참)

8. 두 조건 $p : |x-2| \le h$, $q : |x+1| \le 7$에 대하여 'p이면 q이다.'가 참이 되도록 하는 h의 최댓값을 구하여라. (단, $h \ge 0$)

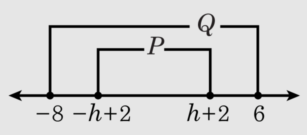
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

p : $2-h \le x \le 2+h$

q : $-8 \le x \le 6$



$-h+2 \ge -8 \leftrightarrow h \le 10$, $h+2 \le 6 \leftrightarrow h \le 4$

$\therefore h \le 4$

$\therefore n$의 최댓값은 4

9. 실수 x에 대한 두 조건

p : $\lvert x-2\rvert < a$ (단, $a > 0$) q : $x < -3$ 또는 $x > 1$

에 대하여 명제 $p \rightarrow q$가 참이 되기 위한 a의 값의 범위를 $\alpha < a \leq \beta$ 라 할 때, $\alpha + \beta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

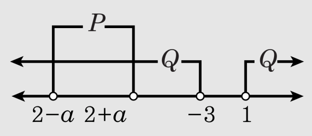
$\lvert x-2\rvert < a$ 에서 $-a < x-2 < a$ $\therefore 2-a < x < 2+a$ $\therefore$

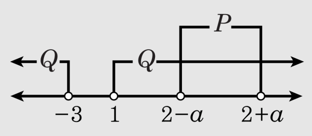
$P = \{x \mid 2-a < x < 2+a\}$, $Q = \{x \mid x < -3$ 또는 $x > 1\}$

따라서 $P \subset Q$가 되려면 $2+a \leq -3 \cdots$ ㉠ 또는 $2-a \geq 1 \cdots$ ㉡,

즉, $a \leq -5$ 또는 $a \leq 1$

그런데 $a > 0$이므로 구하는 a의 범위는 $0 < a \leq 1$

㉠ :


㉡ :


$\therefore \alpha = 0,\ \beta = 1$

$\therefore \alpha + \beta = 1$

10. 네 개의 조건 p, q, r, s에 대하여 $q \Rightarrow \sim s$, $\sim r \Rightarrow p$ 라 한다. 이로부터 $s \Rightarrow r$라는 결론을 얻기 위해 다음 중 필요한 것은?

① $p \Rightarrow q$　　② $p \Rightarrow \sim r$　　③ $r \Rightarrow q$

④ $r \Rightarrow s$　　⑤ $\sim s \Rightarrow q$

해설

$q \rightarrow \sim s, \sim r \rightarrow p$

$s \rightarrow \sim q, \sim p \rightarrow r$

$\therefore \sim q \rightarrow \sim p \Rightarrow p \rightarrow q$

11. 세 조건 $p : |x| < 1, q : x > a, r : x > 2$ 에 대하여 p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이고 q 는 r 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

① $1 < a < 2$　　② $1 \le a \le 2$

③ $a < 1$ 또는 $a > 2$　　④ $a \le 1$ 또는 $a \ge 2$

⑤ $a > 0$

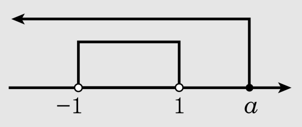
해설

$p : |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로

$\{x \mid -1 < x < 1\} \subset \{x \mid x \le a\}$

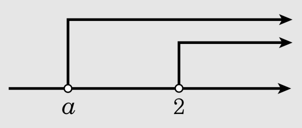
$\therefore a \ge 1 \cdots$ ㉠



q 는 r 이기 위한 필요조건이므로

$\{x \mid x > 2\} \subset \{x \mid x > a\}$

$\therefore a \le 2 \cdots$ ㉡



따라서, ㉠과 ㉡을 동시에 만족시켜야 하므로 $1 \le a \le 2$

12. 실수 x에 대하여 두 조건 p : $a \le x \le 1$, q : $x \ge -1$이 있다. 명제 $p \to q$를 참이 되게 하는 상수 a 의 범위는?

① $a > 1$　　② $a \le 1$　　③ $-1 \le a \le 1$

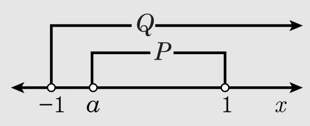
④ $a \ge -1$　　⑤ $a \le -1$

해설

조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

(i) $a > 1$일 때, $P = \varnothing$ 이므로 $P \subset Q$ $\therefore$ $a > 1$

(ii) $a \le 1$ 일 때, 수직선에 나타내면



$\therefore$ $-1 \le a \le 1$

(i), (ii)에서 $a \ge -1$