

1. 길이가 6인 선분을 같은 방향으로 2:1로 내분하는 점과 외분하는 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

길이가 6인 선분을 OA라 하고,
O를 원점으로 잡으면 A의 좌표는 (6, 0)
이 선분을 2:1로 내분하는 점 P(x_1)라 하면

$$x_1 = \frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{2 + 1} = 4$$

2:1로 외분하는 점 Q(x_2)라 하면

$$x_2 = \frac{2 \times 6 - 1 \times 0}{2 - 1} = 12$$

따라서 $PQ = 12 - 4 = 8$

2. A (4, 7), B (3, 2), C (5, 3), D (x, y)에 대하여 사각형 ABCD가 평행 사변형일 때, $y - x$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\left(\frac{4+5}{2}, \frac{7+3}{2}\right) = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+2}{2}\right)$$

$$\therefore x+3=9, y+2=10$$

$$\therefore x=6, y=8$$

3. 두 점 $(1, 2)$, $(2, 1)$ 을 지나고, x 축에 접하는 원은 두 개있다. 두 원의 중심 사이의 거리는?

① 4 ② 5 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 6 ⑤ $4\sqrt{3}$

해설

그 원을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$ 이라 하면
(1, 2), (2, 1)을 지나므로
 $(1-a)^2 + (2-b)^2 = b^2$, $(2-a)^2 + (1-b)^2 = b^2$
 $1-2a+a^2+4-4b=0 \cdots \textcircled{1}$
 $4-4a+a^2+1-2b=0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2} \times 2 - \textcircled{1}$
 $a^2-6a+5=0$, $(a-1)(a-5)=0$
 $\therefore a=1$ 또는 $a=5$
i) $a=1$ 이면 $\textcircled{1}$ 에서 $b=1$
ii) $a=5$ 이면 $\textcircled{1}$ 에서 $b=5$
 $\therefore$ 두 원의 중심은 $(1, 1)$, $(5, 5)$ 이다.
중심거리
 $= \sqrt{(5-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

4. 직선 $y = -2x + a$ 가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에 의하여 잘려지는 선분의 길이를 최대로 하는 a 의 값은 ?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$$

직선 $y = -2x + a$ 가 원의 중심 (2, 1)을 지날 때, 잘린 선분의 길이가 최대이므로

$$a = 2 \times 2 + 1 = 5$$

5. 좌표평면에서 원 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$ 을 평행이동하여 원 $x^2 + y^2 = c$ 를 얻었다. 이 때, 상수 c 의 값은?

① 3

② 5

③ 6

④ 9

⑤ 16

해설

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$ 을 변형하면

$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$

이 원이 평행이동하여 $x^2 + y^2 = c$ 가 되려면 $c = 5$

6. 점 A $(-2, 3)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점을 B, 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 C 라 할 때, 두 점 B, C 를 지나는 직선의 방정식은?

① $y = 2x - 3$

② $y = 2x - 5$

③ $y = x - 1$

④ $y = x - 3$

⑤ $y = x - 5$

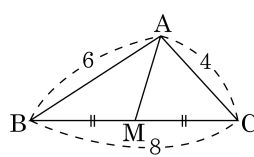
해설

점 A $(-2, 3)$ 을 원점에 대하여
대칭이동한 점 B 의 좌표는 $(2, -3)$ 이고,
점 A $(-2, 3)$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여
대칭이동한 점 C 의 좌표는 $(3, -2)$ 이다.
따라서, 두 점 B $(2, -3)$, C $(3, -2)$ 를 지나는
직선의 방정식은

$$y + 3 = \frac{-2 + 3}{3 - 2}(x - 2), y + 3 = x - 2$$

$$\therefore y = x - 5$$

7. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 4$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2) \text{ 이므로}$$

$$6^2 + 4^2 = 2(\overline{AM}^2 + 4^2)$$

$$36 + 16 = 2\overline{AM}^2 + 32$$

$$\therefore \overline{AM}^2 = 10$$

8. 다음 그림과 같이 고압 전선 $\overline{DE}$ 가 지나는 곳으로부터 각각 50m, 100m 떨어진 두 지점에 빌딩 A, B가 위치하고 있다. 변압기를 D와 E 사이의 한 지점에 설치하여 빌딩 A, B에 전력을 공급하려고 한다. D와 E 사이의 거리가 200m 일 때, 전체 전선의 길이 $\overline{AC} + \overline{BC}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답: m

▷ 정답 : 250m

해설

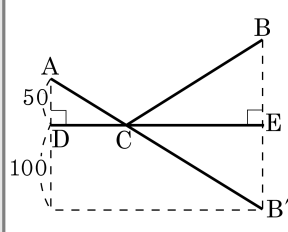
B를 $\overline{DE}$ 에 대해 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$$\overline{BC} = \overline{CB'} \text{ 이므로}$$

$$\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$$

$$AC + BC = AC + CB' \geq AB$$

따라서 $\overline{AC} + \overline{BC}$ 의 최솟값은
 $\overline{AB'} = \sqrt{200^2 + 150^2} = 250(\text{m})$



9. 두 점 $(4, -2), (2, -3)$ 을 지나는 직선의 x 절편을 A, y 절편을 B, 원점을 O라 할 때, $\triangle OAB$ 의 면적을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(4, -2), (2, -3)$ 를 지나는 직선은

$$y = \frac{-2 - (-3)}{4 - 2}(x - 2) - 3 = \frac{1}{2}x - 4$$

$\Rightarrow x$ 절편은 8이고, y 절편은 -4 이다.

$\therefore \triangle OAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16 \text{ 이다.}$$

10. 직선 $ax + y - 1 = 0$ 이 직선 $2x + by - 5 = 0$ 에 평행하고, 직선 $x + (a - 1)y - 3 = 0$ 에 수직일 때, $2a + b$ 의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

두 직선이 평행하면 기울기가 일치한다.

$$\Rightarrow -a = -\frac{2}{b} \quad \cdots \textcircled{A}$$

두 직선이 수직하면 기울기의 곱이 -1 이다.

$$\Rightarrow -a \times -\frac{1}{(a-1)} = -1 \quad \cdots \textcircled{B}$$

$$\therefore \textcircled{A}, \textcircled{B} \text{를 연립하면, } a = \frac{1}{2} \quad b = 4$$

$$\therefore 2a + b = 5$$

11. 좌표평면 위의 두 점 A(-1, 4), B(3, 2) 를 이은 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식은?

① $y = -2x - 5$

② $y = -2x + 5$

③ $y = 2(x - 5)$

④ $y = 2x + 1$

⑤ $y = 2x - 1$

해설

선분 AB 의 기울기 : $\frac{2-4}{3-(-1)} = -\frac{1}{2}$

따라서, 선분 AB 의 수직이등분선의 기울기는 2 이다.

또, 선분 AB 의 수직이등분선은 두 점 A, B 의 중점을 지난다.

중점의 좌표는 $\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = (1, 3)$ 이므로

구하는 직선의 방정식은 $y - 3 = 2(x - 1)$

$\therefore y = 2x + 1$

12. 두 직선 $3x + 4y + 4 = 0$, $3x + 4y + 2 = 0$ 사이의 거리는 얼마인가?

- ① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$3x + 4y + 4 = 0$ 의 임의의 한 점을 잡는다.

$(0, -1)$ 점과 직선 사이의 거리를 구하는

공식을 이용하면

$$\therefore \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{5}$$

13. $x^2 + y^2 = 1$ 일 때, $2x + y$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

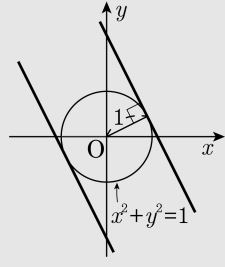
▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 $\sqrt{5}$

▷ 정답 : 최솟값 $-\sqrt{5}$

해설



구하는 $2x + y = k$ 라 하면 $y = -2x + k$ 에서 k 는 기울기가 -2 인 직선의 y 절편이다.

주어진 조건을 만족할 때, 직선은 다음 그림과 같이 존재하므로

점과 직선사이의 거리에서 $\frac{|k|}{\sqrt{5}} \leq 1$

$\therefore -5 \leq k \leq \sqrt{5}$

14. 점 $(a-4, a-2)$ 를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 다음, $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점과 원점 사이의 거리가 2일 때, 처음 점의 좌표를 (p, q) 라 한다. $p^2 + q^2$ 의 값을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$(a-4, a-2) \rightarrow (a, a-2)$
(x 축으로 4만큼 평행이동)
 $(a, a-2) \rightarrow (a-2, a)$
($y = x$ 에 대칭이동)
 $(a-2, a)$ 와 원점 사이의 거리는
 $\sqrt{(a-2)^2 + a^2} = 2$
 $2a^2 - 4a + 4 = 4,$
 $\therefore a = 2$ ($\because a \neq 0$)
처음 점의 좌표 $(a-4, a-2)$ 에 $a = 2$ 를 대입하면
구하는 점의 좌표 $(p, q) = (-2, 0)$
 $\therefore p^2 + q^2 = 4$

15. 두 점 A(3, 2), B(a, b) 를 지나는 직선의 기울기가 2 이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$ 의 교점은 선분 AB 를 2 : 1 로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$ 의 값은?

- ① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

직선 AB 의 기울기는 2 이므로

$$\frac{b-2}{a-3} = 2, b-2 = 2(a-3), b = 2a-4 \cdots \textcircled{1}$$

$\overline{AB}$ 를 2 : 1 로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1 \cdot 3}{2+1}, \frac{2b+1 \cdot 2}{2+1} \right) = \left(\frac{2a+3}{3}, \frac{2b+2}{3} \right) \text{ 이고,}$$

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3} + 2 \cdot \frac{2b+2}{3} - 3 = 0$$

$$\therefore a + 2b - 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = \frac{9}{5}, b = -\frac{2}{5} \text{ 이다.}$$

$$\therefore 3a + b = 5$$

16. 원점과 직선 $2x - y - 5 + k(x + 2y) = 0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라고 할 때, $\frac{1}{f(k)^2}$ 의 최솟값은?

- ㉠ $\frac{1}{5}$ ㉡ $\frac{2}{5}$ ㉢ $\frac{3}{5}$ ㉣ $\frac{4}{5}$ ㉤ 1

해설

점 $P(x_1, y_1)$ 과 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

원점과 직선 $(2+k)x + (2k-1)y - 5 = 0$ 사이의 거리

$$f(k) \text{ 는 } f(k) = \frac{|-5|}{\sqrt{(2+k)^2 + (2k-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5(1+k^2)}}$$

$$\therefore \frac{1}{\{f(k)\}^2} = \frac{k^2 + 1}{5}$$

따라서, $k = 0$ 일 때, 최솟값 $\frac{1}{\{f(0)\}^2} = \frac{1}{5}$ 이다.

17. 두 원 $x^2 + y^2 = r^2$, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ 의 교점을 P, Q 라할 때,
선분 PQ의 길이를 최대로 하는 양수 r 의 값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$A : x^2 + y^2 = r^2, B : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$
라고 하면
 $\overline{PQ}$ 가 원 B 의 지름일 때
 $\overline{PQ}$ 의 길이는 최대가 된다.
 $\therefore r = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2} = 3$

18. 점 A(2, 2)에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 두 접선의 기울기를 α, β 라 할 때, $\alpha\beta$ 의 값은 ?

- ① $\frac{8}{3}$ ② $-\frac{8}{3}$ ③ 1 ④ -1 ⑤ 0

해설

점 (2, 2)를 지나고 기울기 m 인 접선을
 $y - 2 = m(x - 2)$ 즉, $mx - y - 2m + 2 = 0$
이라고 하면

원의 중심 (0, 0)에서 접선까지 거리는
원의 반지름 1과 같아야 한다.

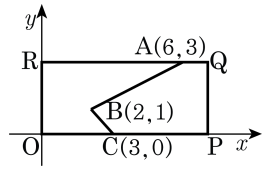
$$\text{따라서 } 1 = \frac{|-2m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}},$$

$$|-2m + 2| = \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2 - 8m + 3 = 0$

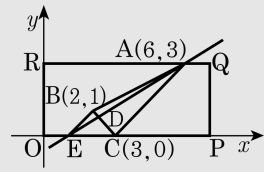
따라서 두 기울기의 곱은 근과 계수와의 관계에 의하여 1이다.

19. $\overline{AB}$ 와 $\overline{BC}$ 는 직사각형 OPQR을 두 부분으로 나누는 경계선이다. 이 경계선을 두 부분의 넓이의 변화 없이 점 A를 지나는 직선으로 바꿀 때, 이 직선의 기울기는?



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

해설



$\overline{AC}$ 와 평행한 보조선 $\overline{BE}$ 를 긋는다.

$\overline{AC} \parallel \overline{BE}$ 이므로 $\triangle ABC = \triangle AEC$,

$\triangle ABD = \triangle CDE$

따라서 $\overline{AE}$ 가 직선 경계임을 알 수 있다.

(직선 AC의 기울기) = (직선 BE의 기울기) = 1

점 B(2, 1)을 지나고 기울기 1인 직선의 방정식은

$y = x - 1$ 이고 E(1, 0)임을 알 수 있다.

$\therefore$ (직선 AE의 기울기) = $\frac{3}{5}$

20. 점 (2, -1) 과 직선 $x - y - 1 = 0$ 사이의 거리는?

- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

$$\therefore \text{거리} = \frac{|2 + 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$