1. $X=\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $Y=\{y \mid -3 \leq y \leq 3\}$ 에서 $f\,:\,X \to Y,\ f(x)=ax+b$ (단, $a>0$) 로 정의되는 함수 f 가 일대일 대응이 되도록 $a,\ b$ 의 값을 정하면?

① $a=\frac{3}{2},\ b=0$ ② $a=\frac{1}{2},\ b=0$ ③ $a=\frac{3}{2},\ b=1$
④ $a=\frac{5}{2},\ b=0$ ⑤ $a=2,\ b=0$

해설

f 가 일대일 대응이고 $a>0$ 이므로

$$\begin{cases} f(-2)=-2a+b=-3 \\ f(2)=2a+b=3 \end{cases}$$

$\therefore\ a=\frac{3}{2},\ b=0$

2. 두 함수 f, g 가 $f(2)=3$, $g^{-1}(1)=4$ 일 때, $f^{-1}(3)+g(4)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(2)=3$ 에서 $f^{-1}(3)=2$ 이고
$g^{-1}(1)=4$ 에서 $g(4)=1$ 이므로
$f^{-1}(3)+g(4)=2+1=3$

3. 함수 $y = |x-3| - 1$ 에 대하여 $0 \le x \le 4$ 일 때, 이 함수의 최댓값과 최솟값을 차례대로 구하면?

① 2, 1　　② 2, 0　　③ 2, -1

④ 1, -1　　⑤ 1, -2

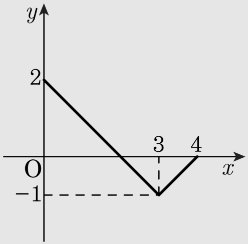
해설

$0 \le x \le 4$ 에서

$y = |x-3| - 1$

$$= \begin{cases} x-4 & (3 \le x \le 4) \\ -x+2 & (0 \le x < 3) \end{cases}$$

따라서, 위 함수의 그래프는 다음 그림과 같으므로



$x = 0$ 일 때

최댓값은 2 이고

$x = 3$ 일 때

최솟값은 -1 이다.

4. 분수식 $\dfrac{x+1+\dfrac{1}{x-1}}{x-1-\dfrac{1}{x-1}}$을 간단히 한 식은?

① $\dfrac{x}{x+2}$ ② $\dfrac{x}{x-2}$ ③ $\dfrac{x}{x+1}$ ④ $\dfrac{x}{x-1}$ ⑤ $\dfrac{2x}{x-1}$

해설

$$(\text{준 식}) = \frac{\dfrac{x^2-1+1}{x-1}}{\dfrac{x^2-2x+1-1}{x-1}} = \frac{x^2}{x(x-2)}$$

$$= \frac{x}{x-2}$$

5. 곡선 $y=\dfrac{x+3}{x-3}$ 은 곡선 $y=\dfrac{6}{x}$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m , n 만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=\dfrac{3x-1}{x+1}$ 의 점근선은 $x=a$, $y=b$ 이다. $m+n+a+b$ 의 값은?

① 6 ② 1 ③ 2 ④ −2 ⑤ −3

해설

$y=\dfrac{x+3}{x-3}=1+\dfrac{6}{x-3}$

$y=\dfrac{6}{x}$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 3만큼 , y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=3,\ n=1$

또, $y=\dfrac{3x-1}{x+1}=-\dfrac{4}{x+1}+3$ 에서

점근선은 $x=-1,\ y=3$ $a=-1,\ b=3$

따라서 구하는 합은 6

6. 함수 $y=-\frac{1}{x}+1$ 의 역함수를 바르게 구한 것은?

① $y=\frac{1}{1-x}$ ② $y=\frac{1}{1+x}$ ③ $y=\frac{x}{1-x}$

④ $y=\frac{1+x}{x}$ ⑤ $y=\frac{x}{1+x}$

해설

$y=-\frac{1}{x}+1$ 에서 $\frac{1}{x}=1-y$

$1=(1-y)x$, $x=\frac{1}{1-y}$

$\therefore\ y=\frac{1}{1-x}$

7. 함수 $y = \sqrt{-2x-2} - 2$의 그래프는 $y = \sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다. 이 때, $m+n$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -1 ④ 0 ⑤ 3

해설

$y = \sqrt{-2x-2} - 2 = \sqrt{-2(x+1)} - 2$의
그래프는 $y = \sqrt{-2x}$의 그래프를
x축의 방향으로 -1만큼, y축 방향으로 -2만큼
평행이동한 것이다.
$\therefore m+n = -1-2 = -3$

8. $1 \le x \le 5$ 에서 함수 $y = -\sqrt{3x+1}+4$ 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = -\sqrt{3x+1}+4 = -\sqrt{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}+4$$

주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$x = 1$ 일 때, 최댓값 $a = -\sqrt{3+1}+4 = 2$

$x = 5$ 일 때, 최솟값 $b = -\sqrt{15+1}+4 = 0$

$\therefore\ a-b = 2-0 = 2$

9. $x>2$에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$가

$f(x) = \sqrt{x-2}+2$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2}+2$일 때, $(f \circ g)(3)+(g \circ f)(3)$의

값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 6

해설

$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$

$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$

$\therefore (f \circ g)(3)+(g \circ f)(3) = 6$

10. 함수 $f(x)$가 $f(x) = x^2+2x-3$ 이고 임의의 실수 x에 대하여 $g(x+1) = f(x-1)$이 성립할 때, $g(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

등식 $g(x+1) = f(x-1)$의 양변에
$x = -1$을 대입하면

$$\begin{aligned} g((-1)+1) = g(0) &= f((-1)-1) \\ &= f(-2) = (-2)^2 + 2\times(-2) - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

11. 정의역이 $\{0,\ 1\}$인 두 함수 $f(x)=x^2+ax+b,\ g(x)=2x+1$에 대하여 $f=g$일 때, $a-b$ 의 값은? (단, $a,\ b$는 상수)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 함수 $f,\ g$가 서로 같으므로
정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$이다.
즉, $f(0)=g(0),\ f(1)=g(1)$이므로
$f(0)=b,\ g(0)=1$에서 $b=1$
$f(1)=1+a+b,\ g(1)=3$에서 $a+b=2$
$\therefore a=1$
$\therefore a-b=0$

12. 실수를 원소로 갖는 집합 X 가 정의역인 두 함수 $f(x) = 3x^2$, $g(x) = x^3 + 2x$ 에 대하여 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 서로 같을 때, 집합 X 의 개수를 구하면? (단, $X \neq \varnothing$)

① 1 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 7 개 ⑤ 8 개

해설

$f(x) = g(x)$ 일 때, $f(x) - g(x) = h(x)$ 로 놓으면,
($h(x)$ 의 근의 개수) = (집합 X 의 개수)
$x^3 + 2x - 3x^2 = 0$
$x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2) = 0$
$x = 0, 1, 2$
x 가 집합 X 의 원소이고 $X \neq \varnothing$ 이므로
집합 X 의 개수는 $2^3 - 1 = 7$(개)

13. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이고, $f(2) = 3,\ (f \circ f)(2) = 1$ 를 만족할 때, $2f(1) + f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(3) = 1\ (\because f(2) = 3\ )$
함수 f 가 일대일 대응이므로 $f(1) = 2$ 이다.
$\therefore 2f(1) + f(3) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

14. 두 함수 $f(x) = 2x+3$, $g(x) = -4x-5$ 일 때, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족시키는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ g)(-2)$ 의 값은 얼마인가?

① 5 ② 3 ③ 1 ④ -3 ⑤ -5

해설

$h(x) = ax+b$ 로 놓으면
$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x+3)$
$= a(2x+3)+b = 2ax+3a+b$
그런데, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 이므로
$2ax+3a+b = -4x-5,$
$2a = -4,\ 3a+b = -5$
즉, $a = -2, b = 1$ 이므로 $h(x) = -2x+1$
$(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3) = -5$

해설

$(h \circ f)(x) = g(x)$ 에서
$h(f(x)) = g(x)$ 이고 $f(x) = 2x+3$ 이므로
$h(2x+3) = g(x)$
또한, $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3)$
$h(3) = g(0) = -5$

15. $f(x)=x+1$, $g(x)=3x-2$ 일 때, $(g\circ h)(x)=f(x)$ 를 만족시키는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x)=\frac{1}{3}x+1$　　② $h(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$

③ $h(x)=x+\frac{1}{3}$　　④ $h(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

⑤ $h(x)=\frac{2}{3}x+1$

해설

$f(x)=x+1$, $g(x)=3x-2$ 일 때,

$(g\circ h)(x)=f(x)$ 를 만족해야 하므로

$(g\circ h)(x)=g(h(x))=3h(x)-2$

$3h(x)-2=x+1$, $3h(x)=x+3$

$\therefore h(x)=\frac{1}{3}x+1$

16. 두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1\}$, $Y = \{1, 3, 5, 7\}$에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 를 $f(x) = 2x+5$ 로 정의 할 때, $f^{-1}(1) + f^{-1}(5)$ 의 값은 얼마인가?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$f^{-1}(1) = a,\ f^{-1}(5) = b$ 로 놓으면

$f(a) = 1,\ f(b) = 5$

$f(x) = 2x+5$ 이므로

$f(a) = 1$ 에서 $2a+5 = 1 \quad \therefore a = -2$

$f(b) = 5$ 에서 $2b+5 = 5 \quad \therefore b = 0$

$\therefore a+b = -2$

17. 등식 $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1}$ 이 x에 대한 항등식이 될 때, $A-B$의 값을 구하면? (단, A, B는 상수)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

주어진 식의 우변을 정리하면

$$\frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}$$

따라서 $\dfrac{(A+B)x+A}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x(x+1)}$ 이므로

$A+B=0,\ A=1$

$\therefore\ B=-1$

$\therefore\ A-B=1-(-1)=2$

18. $a+b+c \neq 0$일 때, $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$의 값을 구하면?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{3}$

해설

$a+b+c \neq 0$이므로 가비의 리를 적용하면

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$$

$$= \frac{a+b+c}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}$$

$$= \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$$

19. $3-\sqrt{2}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을b 라 할 때, $a+\dfrac{2}{b}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3+\sqrt{2}$

해설

$1<\sqrt{2}<2$ 이므로 $a=1,\ \ b=2-\sqrt{2}$

따라서 $a+\dfrac{2}{b}=1+\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}$

$$=1+\frac{2(2+\sqrt{2})}{2}$$

$$=3+\sqrt{2}$$

20. $x = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$, $y = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ 일 때, $x^3 + y^3$ 의 값은?

① $8\sqrt{3}$ ② $24\sqrt{3}$ ③ $30\sqrt{3}$ ④ 48 ⑤ 52

해설

$$x = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3},$$

$$y = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

$$x+y=4, \quad xy=1$$

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= 4^3 - 3\times 4 = 52 \end{aligned}$$

21. 무리함수 $y = \sqrt{kx}$의 그래프가 두 점 $(2,\ 2)$, $(3,\ 6)$을 잇는 선분과 만나도록 하는 정수 k의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 11 개

해설

함수 $y = \sqrt{kx}$의 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지날 때

$2 = \sqrt{2k}, \quad 2k = 4$

$\therefore k = 2$

또, 함수 $y = \sqrt{kx}$의 그래프가 점 $(3,\ 6)$을 지날 때

$6 = \sqrt{3k}, \quad 3k = 36$

$\therefore k = 12$

따라서 구하는 실수 k의 값의 범위는

$2 \le k \le 12$ 이므로

정수 k는 $2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 12$ 의 11개다.

22. 곡선 $y = \sqrt{4x-8}$과 직선 $y = x+k$가 한 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?

① $k=-2$ 또는 $k>1$

② $k=-1$ 또는 $k<-2$

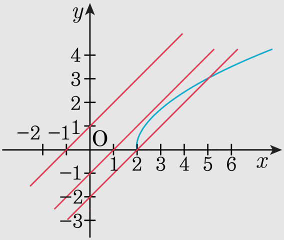
③ $k=1$ 또는 $k>2$

④ $k=2$ 또는 $k<-1$

⑤ $k=-1$

해설

그래프에서 보듯이 한 점에서 만나는 경우는
접하는 경우이거나 $k<-2$인 경우이다.



접하는 경우는 $\sqrt{4x-8} = x+k$에서

$4x-8 = x^2+2kx+k^2$

$x^2+2(k-2)x+k^2+8=0$

$\frac{D}{4} = (k-2)^2-(k^2+8) = -4k-4 = 0$에서 $k=-1$

따라서 $k=-1$ 또는 $k<-2$

23. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 에 대하여 $f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=6x-1$ 이다. $f\left(\dfrac{4-x}{3}\right)=ax+b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

① -36　② -20　③ -4　④ 20　⑤ 36

해설

$f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=6x-1$ 에서 $\dfrac{x+1}{2}=t$ 라고 하면 $x=2t-1$ 이므로

$f(t)=6(2t-1)-1=12t-7$　$\cdots\cdots$ ㉠

㉠에 t 대신에 $\dfrac{4-x}{3}$ 를 대입하면

$f\left(\dfrac{4-x}{3}\right)=12\left(\dfrac{4-x}{3}\right)-7=16-4x-7=-4x+9$

$\therefore\ ab=(-4)\cdot 9=-36$

24. 함수 $y=|x+1|-|x-3|$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M-m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y=|x+1|-|x-3|$ 에서

i) $x<-1$ 일 때

$y=-(x+1)+x-3=-4$

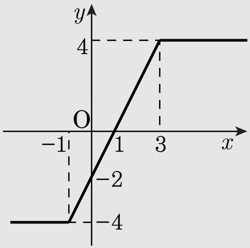
ii) $-1\le x<3$ 일 때

$y=x+1+x-3=2x-2$

iii) $x\ge 3$ 일 때

$y=x+1-(x-3)=4$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로



$M=4, m=-4$

$\therefore M-m=4-(-4)$

$=8$

25. $x = \sqrt{2}+1$, $y = \sqrt{2}-1$ 일 때,

$\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ 의 값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

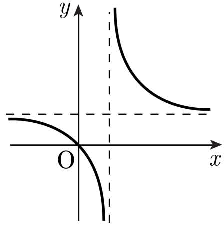
$$= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x-y}$$

$$= \frac{x+y-2\sqrt{xy}+x+y+2\sqrt{xy}}{x-y} = \frac{2(x+y)}{x-y}$$

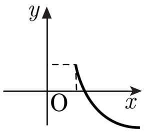
$$\begin{cases} x+y = \sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1 = 2\sqrt{2} \\ x-y = \sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1 = 2 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{2(x+y)}{x-y} = \frac{2\times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

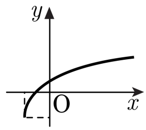
26. 다음 그림은 분수함수 $y = \dfrac{b}{x+a} + c$ 의 그래프의 개형이다. 다음 중 무리함수 $y = a - \sqrt{bx+c}$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



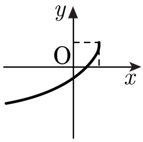
①



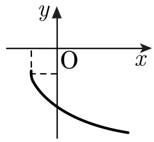
②



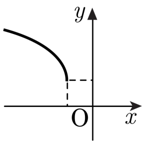
③



④



⑤



해설

점근선이 $x =$ 양수, $y =$ 양수 이므로

$y = \dfrac{b}{x+a} + c$에서 $a < 0,\ c > 0$

그리고 원점을 지나므로

$\dfrac{b}{a} + c = 0,\ b = -ac > 0$

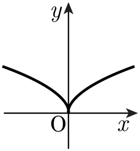
$\therefore\ y = -\sqrt{bx+c} + a$

꼭짓점 $\left(-\dfrac{c}{b},\ a\right),\ \left(-\dfrac{c}{b} < 0, a < 0\right)$

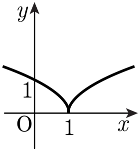
루트 앞의 부호가 음수이므로 그래프의 개형은 ④이다.

27. 다음 중 함수 $y = \sqrt{|x+1|}$의 그래프를 구하면?

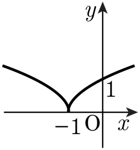
①



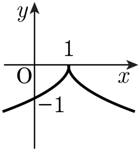
②



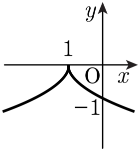
③



④



⑤



해설

$x \geq -1$이면 $y = \sqrt{x+1}$

$x < -1$이면 $y = \sqrt{-x-1}$이므로

3번이 정답임.

28. 함수 $f(x) = \sqrt{x-2}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 점 P 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위를 움직이고, 점 Q 는 $y = g(x)$ 의 그래프 위를 움직인다. 이 때, 두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값을 구하면?

① $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{7\sqrt{2}}{4}$ ④ $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

해설

우선, $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 를 구하자.

$f(x) = \sqrt{x-2}$ 라 하면 $y^2 = x-2$

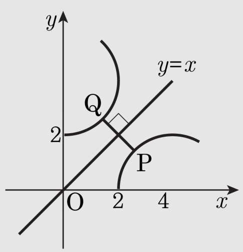
$\therefore\ x = y^2 + 2$

위 식의 x 와 y 를 바꾸면 $y = x^2 + 2$

$\therefore\ f^{-1}(x) = g(x) = x^2 + 2$

한편, 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 역함수 관계이므로

직선 $y = x$에 대칭이다.



또, P, Q 사이의 거리가 최소가 되는 것은

선분 PQ와 직선 $y = x$가 수직을 이룰 때이다.

동점 P , Q 사이의 거리의 최솟값은 점 Q 와 직선 $y = x$ 사이의 거리의 최솟값의 2 배이다. 동점 $Q(a,\ a^2+2)$ 라 놓고

직선 $y = x$ 와 점 Q 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|\,a-(a^2+2)\,|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{\left|-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right|}{\sqrt{2}}$$

거리 d 의 최솟값은 $a = \frac{1}{2}$ 일 때

$\frac{\frac{7}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}$ 이므로

두 점 P, Q 사이의 거리의 최소값은

$\therefore\ \frac{7\sqrt{2}}{8} \times 2 = \frac{7\sqrt{2}}{4}$

29. $x^2-5x+1=0$일 때, $x^2+\dfrac{1}{x^2}$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

$x^2-5x+1=0$에서 양변을 x로 나눈다.

$$x+\frac{1}{x}-5=0$$

$$x+\frac{1}{x}=5$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=25-2=23$$

30. 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$, $x = \sqrt{-2y+3}$ 의 그래프의 교점의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

해설

함수 $y = \sqrt{-2x+3}$ 에서 x와 y를 서로 바꾸면

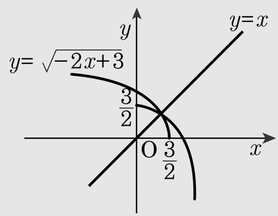
$x = \sqrt{-2y+3}$이므로 두 함수는 서로 역함수의

관계에 있다.

따라서, 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$,

$x = \sqrt{-2y+3}$의 그래프는

직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.



즉, 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$, $x = \sqrt{-2y+3}$의

그래프는 아래 그림과 같으므로

두 함수의 그래프의 교점은

함수 $y = \sqrt{-2x+3}$의 그래프와

직선 $y = x$의 교점과 같다.

두 식을 연립한 방정식 $\sqrt{-2x+3} = x$의 을

제곱하면, $-2x+3 = x^2$, $x^2+2x-3=0$

$(x-1)(x+3)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-3$

그런데 $0 \le x \le \frac{3}{2}$ 이므로 $x=1$, $y=1$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(1,\ 1)$이므로

$a=1$, $b=1$

$\therefore\ a+b=2$