1. 두 다항식 $f(x) = x^2+3x+a$, $g(x) = x^3+ax$를 $x+2$로 나눈 나머지가 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

해설

$f(x) = x^2 + 3x + a$, $g(x) = x^3 + ax$에서
$f(-2) = g(-2)$이므로
$4 - 6 + a = -8 - 2a$
$\therefore\ a = -2$

2. 다항식 $f(x)$를 $x-2,\ x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 각각 $1,\ -4$이다. $f(x)$를 x^2+x-6으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(5)$의 값을 구하면?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$f(2)=1,\ f(-3)=-4$
$R(x)=ax+b$라 하면
$f(x)=(x+3)(x-2)Q(x)+ax+b$
$2a+b=1,\ -3a+b=-4$
$\therefore\ a=1,\ b=-1$
$R(x)=x-1$
$R(5)=5-1=4$

3. $f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지가 각각 3, 5일 때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 나머지를 구하면?

① $2x+1$　② $2x+3$　③ $2x-1$
④ $2x$　⑤ $2x-3$

해설

x^2-3x+2로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면 $f(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$
그런데 $f(1)=3$, $f(2)=5$이므로
$a+b=3$, $2a+b=5$
$\therefore\ a=2,\ b=1$
따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

4. 다항식 $2x^{30}+2x^{28}-x$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$2x^{30}+2x^{28}-x=(x+1)Q(x)+R$
양변에 $x=-1$을 대입 하면,
$2+2+1=R \therefore\ R=5$
양변에 $x=1$을 대입 하면,
$2+2-1=2Q(1)+5$
$\therefore\ Q(1)=-1$

5. 다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 1이고, 또 $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 -2이다. $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(x) = (x-3)Q(x) + 1$

$Q(2) = -2$

$f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 $f(2)$이다.

$f(2) = (2-3)Q(2) + 1$

$= -1 \times (-2) + 1 = 3$

6. 다항식 $4x^3+6x^2-12x-11$을 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 하고 다항식 $Q(-2x+3)$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 r이라 할 때, $R+r$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$4x^3+6x^2-12x-11=(x+2)Q(x)+R$

$x=-2$을 대입하면 $R=5$

$4x^3+6x^2-12x-11=(x+2)Q(x)+5\cdots$ ㉠

$Q(-2x+3)=(x-1)Q'(x)+r$

$x=1$을 대입하면 $r=Q(1)$

㉠에 $x=1$을 대입하면,

$4+6-12-11=3Q(1)+5$에서 $Q(1)=r=-6$

$\therefore\ R+r=5+(-6)=-1$

7. x^5+x+1을 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 할 때, $Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^5+x+1=(x+1)Q(x)+R$
$x=-1$을 양변에 대입하면 $R=-1$
$\therefore\ x^5+x+1=(x+1)Q(x)-1\cdots$ ㉠
$Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 $Q(1)$
㉠에 $x=1$을 대입하면 $3=2Q(1)-1$
$\therefore\ Q(1)=2$

8. x의 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눌 때, 나머지가 2이다. 이 때, $(x^2-x+3)f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지를 구하면?

① 10　　② 6　　③ 0　　④ 30　　⑤ 12

해설

$f(-1)=2$

$(x^2-x+3)f(x)=(x+1)Q(x)+R$

$x=-1$ 대입

$\therefore R=5f(-1)=5\times 2=10$

9. 다항식 $f(x)$를 $(3x+2)(x-4)$로 나눈 나머지가 $-2x+1$일 때, $f(x^2+3)$을 $x-1$로 나눈 나머지는?

① 7　　② 4　　③ 0　　④ -4　　⑤ -7

해설

$f(x) = (3x+2)(x-4)Q(x) - 2x + 1 \cdots$ ①

$f(x^3+3) = (x-1)Q'(x) + R \cdots$ ②

①의 양변에 $x = 4$를 대입하면 $f(4) = -7$

②의 양변에 $x = 1$을 대입하면 $f(4) = R$

$\therefore\ R = -7$

10. x에 대한 다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-3$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $a+b+c+d+k$의 값을 구하면?

$$\begin{array}{c|cccc} k & 1 & a & -1 & b \\ & & c & d & 33 \\ \hline & 1 & 4 & 11 & \boxed{37} \end{array}$$

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

해설

다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-3$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & a & -1 & b \\ & & 3 & 3a+9 & 9a+24 \\ \hline & 1 & a+3 & 3a+8 & \boxed{9a+b+24} \end{array}$$

이때 $k=3$, $c=3$, $a+3=4$, $3a+9=d$, $9a+b+24=37$ 이므로

$k=3$, $c=3$, $a=1$, $d=12$, $b=4$

따라서 $a+b+c+d+k=1+4+3+12+3=23$

11. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $i=1$일 때, $a+b+c$의 값을 옳게 구한 것은?

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & b & c \\ & & d & e & f \\ \hline & 1 & g & h & \boxed{i} \end{array}$$

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & b & c \\ & & 1 & a+1 & a+b+1 \\ \hline & 1 & a+1 & a+b+1 & \boxed{a+b+c+1} \end{array}$$

이때 $a+b+c+1=1$이므로

$a+b+c=0$

따라서 ③이다.

12. x 에 대한 항등식 $x^3 - 1 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$ 를 만족하는 상수 a, b, c, d 의 곱 $abcd$ 의 값은?

① -2　　② 0　　③ 5　　④ 10　　⑤ 18

해설

$a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$
$= (x+1)[(x+1)\{a(x+1)+b\}+c]+d$ 임을 이용하여 조립제법을 사용하면

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
-1 & 1 & 0 & 0 & -1 & \\
 & & -1 & 1 & -1 & \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 1 & \boxed{-2} & \leftarrow \mathrm{d} \\
 & & -1 & 2 & & \\
\hline
-1 & 1 & -2 & \boxed{3} & \leftarrow & \mathrm{c} \\
 & & -1 & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{-3} & \leftarrow \mathrm{b} & & \\
 & \uparrow & & & & \\
 & \mathrm{a} & & & &
\end{array}
$$

$\therefore\ abcd = 1 \times (-3) \times 3 \times (-2) = 18$

13. $2x^3+9x^2+11x+7=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 가 x에 대한 항등식일 때, $a,\ b,\ c, d$를 차례로 구하면?

① $3,\ -1,\ 3,\ 2$
② $2,\ 3,\ -1,\ 3$
③ $-3,\ 1,\ -3,\ -2$
④ $-2,\ -3,\ 1,\ -3$
⑤ $1,\ -3,\ 4,\ -2$

해설

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrrl}
-1 & 2 & 9 & 11 & 7 & \\
 & & -2 & -7 & -4 & \\
\hline
-1 & 2 & 7 & 4 & \boxed{3} & \leftarrow \mathrm{d} \\
 & & -2 & -5 & & \\
\hline
-1 & 2 & 5 & \boxed{-1} & \leftarrow & \mathrm{c} \\
 & & -2 & & & \\
\hline
 & 2 & \boxed{3} & \leftarrow \mathrm{b} & & \\
 & \uparrow & & & & \\
 & \mathrm{a} & & & &
\end{array}$$

$a=2,\ b=3,\ c=-1,\ d=3$

14. 등식 $3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ 이 x 에 관한 항등식일 때, 상수 b 의 값은?

① 3　　② -4　　③ 2　　④ 8　　⑤ 6

해설

$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$
$=(x-1)\{a(x-1)+b\}+c$

$$\begin{array}{c|ccccl}
1 & 3 & 2 & 1 & & \\
 & & 3 & 5 & & \\
\hline
1 & 3 & 5 & \boxed{6} & \leftarrow & c \\
 & & 3 & & & \\
\hline
 & 3 & \boxed{8} & \leftarrow c & & \\
 & \uparrow & & & & \\
 & a & & & &
\end{array}$$

해설

$x=1$ 을 대입하면 $c=6$
$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+6$
$\rightarrow 3x^2+2x-5=a(x-1)^2+b(x-1)$
$\rightarrow (x-1)(3x+5)=a(x-1)^2+b(x-1)$
$\rightarrow$ 양변을 $x-1$ 로 나누면
$3x+5=a(x-1)+b=ax-a+b$
$\therefore\ a=3,\ b=8$
※ 준식의 우변을 모두 전개해서 계수비교하여 구할 수도 있다.

15. 임의의 실수 x에 대하여 $2x^3-5x+2=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 가 성립할 때, $a^2-b^2+c^2-d^2$ 의 값을 구하면?

① 56　　② 28　　③ −28　　④ −46　　⑤ −56

해설

a, b, c, d 는 $2x^2-5x+2$ 를 $(x+1)$ 로 계속 나눠 줄때 나오는 나머지이다.

조립제법을 이용해 보면

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
-1 & 2 & 0 & -5 & 2 & \\
 & & -2 & 2 & 3 & \\
\hline
-1 & 2 & -2 & -3 & \boxed{5} & \leftarrow \text{d} \\
 & & -2 & 4 & & \\
\hline
-1 & 2 & -4 & \boxed{1} & \leftarrow \text{c} & \\
 & & -2 & & & \\
\hline
-1 & 2 & \boxed{-6} & \leftarrow \text{b} & & \\
 & \uparrow & & & & \\
 & \text{a} & & & &
\end{array}
$$

$\therefore a^2-b^2+c^2-d^2=2^2-(-6)^2+1^2-5^2=-56$

16. x 에 관한 항등식 $x^3+2x^2-3x+5=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ 를 만족시키는 $a,\ b,\ c,\ d$ 에 대하여 $abcd$ 의 값은?

① -10　② 10　③ 50　④ 100　⑤ 200

해설

$a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$
$=(x-1)\{a(x-1)^2+b(x-1)+c\}+d$
$=(x-1)[(x-1)\{a(x-1)+b\}+c]+d$
따라서 x^3+2x^2-3x+5 를 $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 $d,\ c,\ b$ 가 되고 마지막의 몫이 a 이다.

$a=1,\ b=5,\ c=4,\ d=5$
$\therefore\ abcd=100$

17. 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지는 5이고, 몫 $Q(x)$를 다시 $x+3$으로 나누면 나머지가 3이다. 이때, $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는?

① 10　② -10　③ 9　④ -9　⑤ 8

해설

나머지정리에 의해 $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는 $f(-3)$이다.
$f(x)=(x-2)Q(x)+5$에서
$x=-3$을 대입하면 $f(-3)=(-3-2)Q(-3)+5$
$Q(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 $Q(-3)=3$
$\therefore\ f(-3)=-10$

18. 1000^{10}을 1001로 나눌 때 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, R라 할 때, 다음 중 나머지 R를 구하기 위한 가장 적절한 식은?

① $x^{10} = xQ(x) + R$

② $x^{10} = (x-1)Q(x) + R$

③ $x^{10} = (x+1)Q(x) + R$

④ $x^{10} = (x-1)^{10}Q(x) + R$

⑤ $x^{10} = (x+1)Q(x) + R + 1$

해설

$1000^{10} = 1001 \cdot Q(x) + R$에서 $1000 = x$라 하면
$x^{10} = (x+1)Q(x) + R$
$x = -1$을 대입하면 $R = 1$을 구할 수 있다.

19. x에 대한 항등식 $x^{1997}+x+1$을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$의 모든 계수와 상수항의 합을 구하면?

① 997　② 998　③ 1997　④ $\frac{1997}{2}$　⑤ $\frac{1997}{3}$

해설

$x^{1997}+x+1=(x^2-1)Q(x)+ax+b$라 하면

$x=1$일 때, $3=a+b$

$x=-1$일 때, $-1=-a+b$

$\therefore\ a=2,\ b=1$

$\therefore\ x^{1997}+x+1=(x^2-1)Q(x)+2x+1$

$x^{1997}-x=(x^2-1)Q(x)$

$x(x-1)(x^{1995}+x^{1994}+\cdots+x+1)$

$=(x-1)(x+1)Q(x)$

$\therefore\ x(x^{1995}+x^{1994}+\cdots+x+1)=(x+1)Q(x)$

$Q(1)$이 $Q(x)$의 모든 계수의 합이므로 $x=1$을 대입하면

$2Q(1)=1996\quad\therefore\ Q(1)=\frac{1996}{2}=998$

20. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이고, $x-1$로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나눌 때의 나머지의 상수항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c(단, a, b, c는 상수) 라고 하면,
$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$
그런데 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이므로
$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+a(x^2+1)+(x+1)$
또 $f(x)$를 $x-1$로 나누면 나머지가 4이므로
$f(1)=2a+2=4$에서 $a=1$
따라서 $ax^2+bx+c=a(x^2+1)+x+1=x^2+x+2$
$\therefore$구하는 나머지의 상수항은 2

21. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이고, $x-1$로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나눌 때, 나머지의 상수항은?

① 4　　② 3　　③ 2　　④ 1　　⑤ 0

해설

$f(x) = (x^2+1)(x-1)g(x) + ax^2 + bx + c$로 두면 x^2+1로 나누었을 때의 나머지가 $x+1$이므로

$ax^2 + bx + c = a(x^2+1) + bx + c - a$에서

$bx + c - a = x + 1$

$\therefore\ b = 1,\ c - a = 1$

또, $f(1) = a + b + c = 4$이므로

$c - 1 + 1 + c = 4$에서 $c = 2$

22. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $(x-3)^2$으로 나누면 나누어 떨어지고, $x+3$으로 나누면 4가 남는다고 한다. 이 때, $f(x)$를 $(x-3)^2(x+3)$으로 나눈 나머지는?

① $(x-3)^2$　② $3x^2+2x-5$　③ $\frac{1}{5}(x-3)^2$
④ x^2+2x-5　⑤ $\frac{1}{9}(x-3)^2$

해설

$f(-3)=4$
$f(x)=(x-3)^2(x+3)Q(x)+ax^2+bx+c$
$f(x)=(x-3)^2(x+3)Q(x)+a(x-3)^2$($\because$ $f(x)$는 $(x-3)^2$으로 나누어 떨어진다.
$f(x)=(x-3)^2\{(x+3)Q(x)+a\}$
$f(-3)=(-3-3)^2a=4$
$\therefore\ a=\frac{1}{9}$
$\therefore$구하는 나머지 : $\frac{1}{9}(x-3)^2$

23. x에 대한 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나누어 떨어지고, $x-3$으로 나눌 때의 나머지는 5이다. 이 다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-3)$으로 나눌 때의 나머지를 구하면?

① $\frac{1}{2}(x^2+1)$　② $\frac{1}{3}(x^2+1)$　③ $\frac{1}{5}(x^2+1)$
④ $2x^2-3x+1$　⑤ $\frac{2}{3}x^2-x+\frac{1}{2}$

해설

$f(x)=(x^2+1)Q_1(x)$
$f(x)=(x-3)Q_2(x)+5$
$\therefore\ f(3)=5$
$f(x)=(x^2+1)(x-3)Q_3(x)+ax^2+bx+c$
$=(x^2+1)(x-3)Q_3(x)+a(x^2+1)$
($\because f(x)$는 x^2+1로 나누어 떨어지므로)
$=(x^2+1)\{(x-3)Q_3(x)+a\}$
$x=3$을 대입하면 $f(3)=10a=5$
$\therefore\ a=\frac{1}{2}$이고 나머지는 $\frac{1}{2}(x^2+1)$

24. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누면 나누어 떨어지고, $x+1$로 나누면 나머지가 4이다. 이 때, $f(x)$를 $(x+1)(x-1)^2$으로 나눌 때, 나머지를 ax^2+bx+c라 하면 $a+b+c$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 4이므로
$f(-1)=4$
$f(x)=(x-1)^2Q(x)\cdots$㉠
$f(x)=(x+1)(x-1)^2Q'(x)+ax^2+bx+c$
$\quad=(x+1)(x-1)^2Q'(x)+a(x-1)^2$ ($\because$ ㉠)
양변에 $x=-1$를 대입하면
$f(-1)=4a=4 \therefore a=1$
$ax^2+bx+c=a(x-1)^2=x^2-2x+1$
$\therefore\ b=-2, c=1$
$\therefore\ a+b+c=0$

해설

ax^2+bx+c를 구하는 것이 아니라 $a+b+c$를 통째로 구할 때는 다음과 같이 풀 수 있다.
$f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누어 떨어지므로 $f(1)=0$
$f(x)=(x+1)(x-1)^2Q'(x)+ax^2+bx+c$
양변에 $x=1$를 대입하면
$f(1)=0+(a+b+c)=0$
$\therefore a+b+c=0$

25. x^{30}을 $x-3$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 할 때, $Q(x)$의 계수의 총합(상수항 포함)과 R와의 차는?

① $\frac{1}{2}(3^{30}+1)$　② $\frac{1}{2}\cdot 2^{30}$　③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
④ $2(3^{30}+1)$　⑤ $2(3^{30}-1)$

해설

문제의 조건으로부터
$x^{30}=(x-3)Q(x)+R\cdots$㉠
이므로 몫 $Q(x)$는 29차의 다항식이다.
㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면 $R=3^{30}$
여기에서 몫은 29차의 다항식이므로
$Q(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{29}x^{29}$
으로 놓으면 $Q(x)$의 계수의 총합은
$x=1$을 대입한
$Q(1)=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{29}$과 같다.
따라서 구하는 차는 $|Q(1)-R|\cdots$㉡
한편 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$1=-2Q(1)+R\ \therefore\ Q(1)=\frac{1}{2}(R-1)$
이 값을 ㉡에 대입하면

$$|Q(1)-R|=\left|\frac{1}{2}(R-1)-R\right|=\frac{|R+1|}{2}$$
$$=\frac{|3^{30}+1|}{2}=\frac{1}{2}(3^{30}+1)$$