

1. $\frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$ 가 $x \neq 1$ 인 모두 실수 x 에 대해 항상 성립 하도록 a, b, c 를 구할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 2 ② -2 ③ 1 ④ -1 ⑤ 0

해설

우변의 분모를 통분하면

$$\frac{a(x^2+x+1) + (bx+c)(x-1)}{x^3-1}$$

$$= \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c)}{x^3-1}$$

$$\therefore \frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c)}{x^3-1}$$

분자의 계수를 비교하면

$$a+b=0, a-b+c=2, a-c=1$$

세 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=-1, c=0$

$$\therefore a+b+c=0$$

2. 등식 $x^2 - 2x + 3 = a + b(x - 1) + c(x - 1)^2$ 이 x 에 관한 항등식일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$x^2 - 2x + 3 = a + b(x - 1) + c(x - 1)^2$$

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 2 = a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x = 0 \text{을 대입하면 } 3 = a - b + c \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$x = 2 \text{를 대입하면 } 3 = a + b + c \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①을 ②, ③에 대입하여 정리하면

$$b - c = -1, b + c = 1$$

두 식을 연립하면 $b = 0, c = 1$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 4 + 0 + 1 = 5$$

3. 등식 $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1)$ 이 x 에 관한
항등식이 되도록 할 때, $2ab$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 2 ⑤ 4

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면, $-2 = 2a \quad \therefore a = -1$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면, $-3 = -b \quad \therefore b = 3$

$\therefore 2ab = -6$

4. $(x+y)a - (x-y)b - (y-z)c - 4z = 0$ 이 x, y, z 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 곱 abc 를 구하면?

① 4

② 8

③ 16

④ 32

⑤ 64

해설

x, y, z 에 대해 정리하면

$$(a-b)x + (a+b-c)y + (c-4)z = 0$$

x, y, z 에 대한 항등식이므로

$$a = b, a + b - c = 0, c = 4$$

$$\therefore a = b = 2, c = 4$$

$$\therefore abc = 16$$

5. 다항식 $6x^3 - 7x^2 + 17x - 3$ 을 $3x - 2$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 할 때, $Q(1) + R$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\begin{aligned} 6x^3 - 7x^2 + 17x - 3 &= (3x - 2)Q(x) + R \\ \text{양변에 } x = 1 \text{을 대입하면, } 13 &= Q(1) + R \\ \therefore Q(1) + R &= 13 \end{aligned}$$

해설

$6x^3 - 7x^2 + 17x - 3$ 를 $3x - 2$ 로 직접 나누거나 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구할 수 있다.

6. a, b 는 정수이고, $ax^3 + bx^2 + 1$ 이 $x^2 - x - 1$ 로 나누어 떨어질 때, b 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

전개했을 때 양변의 최고차항과 상수항이 같아야 하므로

$$ax^3 + bx^2 + 1$$

$$= (x^2 - x - 1)(ax - 1)$$

$$= ax^3 - (1+a)x^2 + (1-a)x + 1$$

양변의 계수를 비교하면

$$-(1+a) = b, 1-a = 0$$

$$\therefore a = 1, b = -2$$

7. 다항식 $x^3 + ax + b$ 가 다항식 $x^2 - x + 1$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로

$x^2 = x - 1$ 을 대입하면

$$ax + (b - 1) = 0$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로,

$$a = 0, b - 1 = 0$$

$$\therefore a = 0, b = 1$$

$$\therefore a + b = 1$$

해설

$$x^3 + ax + b$$

$$= (x^2 - x + 1)Q(x)$$

$$= (x^2 - x + 1)(x + b)$$

$$\therefore b = 1, a = 0$$

8. 다항식 x^3+ax-8 을 x^2+4x+b 로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$ 가 되도록 상수 $a+b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x^3+ax-8 을 x^2+4x+b 로 직접나눈 나머지는
 $(a-b+16)x+4b-8$
 $(a-b+16)x+4b-8=3x+4\cdots\cdots㉠$
㉠이 x 에 대한 항등식이므로,
 $a-b+16=3, 4b-8=4$
 $\therefore a=-10, b=3$
 $\therefore a+b=-7$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$ 의 양변의 계수를 비교하여 $a=-10, b=3, p=-4$ 를 구해도 된다.

9. x 에 대한 다항식 $(4x^2-3x+1)^5$ 을 전개하였을 때, 모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

- ① 0 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 1024

해설

$(4x^2-3x+1)^5$ 을 전개하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면 $(4x^2-3x+1)^5=a_0x^{10}+a_1x^9+a_2x^8+\cdots+a_9x+a_{10}$ 과 같이 된다.
여기서 모든 계수들의 합 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$ 을 구하려면 $x=1$ 을 대입하면 된다.
즉, $(4-3+1)^5=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$
모든 계수들의 합은 $2^5=32$

10. $\frac{2x+3a}{4x+2}$ 가 x 에 관계없이 일정한 값을 가질 때, a 의 값을 구하면?
(단, $x \neq -\frac{1}{2}$)

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$\frac{2x+3a}{4x+2} = k \text{ (일정)라 놓으면}$$

$$2x+3a = k(4x+2) \text{ 에서 } (2-4k)x + (3a-2k) = 0$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$2-4k = 0, 3a-2k = 0$$

$$\therefore k = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } a = \frac{1}{3}$$

11. 등식 $(2k+1)y - (k+3)x + 10 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$(\text{준식}) = (y - 3x + 10) + (2y - x)k = 0$$

$$\therefore 2y = x, y - 3x = -10$$

$$\therefore x = 4, y = 2$$

$$\therefore x + y = 6$$

12. 등식 $(2k+1)y - (k+3)x + 10 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$(\text{준식}) = (y - 3x + 10) + (2y - x)k = 0$$

$$\therefore 2y = x, \quad y - 3x = -10$$

$$\therefore x = 4, \quad y = 2$$

$$\therefore x + y = 6$$

13. k 의 값에 관계없이 $(3k^2 + 2k)x - (k + 1)y - (k^2 - 1)z$ 의 값이 항상 1일 때, $x + y + z$ 의 값은?

① -3 ② 0 ③ 3 ④ 6 ⑤ 8

해설

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$k^2(3x - z) + k(2x - y) - (y - z) = 1$$

위 식이 k 의 값에 관계없이 성립하므로 k 에 대한 항등식이다.

$$\begin{cases} 3x - z = 0 & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ 2x - y = 0 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ z - y = 1 & \sim \cdots \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$x = 1, y = 2, z = 3$$

$$\therefore x + y + z = 6$$

14. $(m^2 - 4)x - 1 = m(3x + 1)$ 를 만족하는 x 가 없도록 하는 상수 m 의 값은?

① -1

② -2

③ -4

④ 4

⑤ 5

해설

$(m^2 - 3m - 4)x - 1 - m = 0$ 의 해가 없으므로

$m^2 - 3m - 4 = 0$ 이고 $-m - 1 \neq 0$

$\therefore m = 4$

15. $\frac{2x+ay-b}{x-y-1}$ 가 $x-y-1 \neq 0$ 인 어떤 x, y 의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$\frac{2x+ay-b}{x-y-1} = k \text{라 놓으면}$$

$$2x+ay-b=k(x-y-1)$$

x, y 에 대하여 정리하면,

$$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$$

위의 식이 x, y 에 대한 항등식이어야 하므로

$$2-k=0, a+k=0, -b+k=0$$

$$\therefore k=2, a=-2, b=2$$

$$\therefore a-b=-4$$

16. $x-y=1$ 을 만족하는 임의의 실수 x, y 에 대하여 $ax^2+bx+cy^2-1=0$ 이 항상 성립할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = x - 1$ 을 준식에 대입하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $(a+b+c)x^2 - (b+2c)x + c - 1 = 0$
 x 에 대한 항등식이므로
 $a+b+c=0, b+2c=0, c-1=0$
 $\therefore a=1, b=-2, c=1$
 $\therefore a+b+c=0$

17. $(x^3 - x^2 - 2x + 1)^5 = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x - 1)^2 + \cdots + a_{15}(x - 1)^{15}$
일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{14}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면
 $1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{15} \cdots \textcircled{1}$
양변에 $x = 2$ 를 대입하면
 $1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{15} \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면
 $2 = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{14})$ 이다.
 $\therefore a_0 + a_2 + \cdots + a_{14} = 1$

18. x 에 대한 다항식 $(ax - 1)^3$ 의 전개식에서 모든 항의 계수의 합이 125일 때, 실수 a 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x = 1$ 을 대입하면 계수들의 합을 얻을 수 있다.

즉, $(a - 1)^3 = 125, a - 1 = 5$

$\therefore a = 6$

19. 2가 아닌 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{ax^2+4x+b}{x-2}$ 의 값이 항상 일정하도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a-b$ 의 값은?

- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 8
- ⑤ 9

해설

$\frac{ax^2+4x+b}{x-2} = k$ 라 하면
 $ax^2+4x+b = k(x-2)$
 $ax^2+(4-k)x+b+2k=0$
 x 에 대한 항등식이므로
 $a=0$
 $4-k=0$ 에서 $k=4$
 $b+2k=0$ 에서 $b=-8$
 $\therefore a-b=8$

해설

주어진 식이 모든 x 에 대해 일정한 값을 가지려면
분자인 ax^2+4x+b 가 분모인 ' $x-2$ ' 만을 인수로 가져야 한다.
즉, 분자가 $k(x-2)$ 가 되어야 한다.
 $\frac{ax^2+4x+b}{x-2} = \frac{4(x-2)}{x-2} = 4$
 $\therefore a=0, b=-8$ 에서 $a-b=8$

20. $x + y + 2z = 1$, $2x - y + z = 5$ 를 만족하는 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 6$ 이 성립할 때, $3a + 2b + c$ 의 값은 얼마인가?

① 12

② 8

③ 4

④ 0

⑤ -2

해설

$$x + y + 2z = 1 \cdots ①$$

$$2x - y + z = 5 \cdots ②$$

$$① + ②: x + z = 2 \Rightarrow z = 2 - x$$

$$② \times 2 - ①: x - y = 3 \Rightarrow y = x - 3$$

$$\therefore ax^2 + by^2 + cz^2 = 6$$

$$\Rightarrow ax^2 + b(x - 3)^2 + c(2 - x)^2$$

$$= (a + b + c)x^2 - (4c + 6b)x + 9b + 4c = 6$$

모든 실수 x, y, z 에 대해 성립하려면

$$a + b + c = 0, 4c + 6b = 0, 9b + 4c = 6$$

위의 식을 연립하여 풀면, $a = 1, b = 2, c = -3$

$$\therefore 3a + 2b + c = 4$$

21. 모든 실수 x 에 대하여 등식 $x^{100}-1=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{100}(x-1)^{100}$ 이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100}=2^m+k$ 이다. $m+k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 98

해설

$x=0$ 을 대입하면

$$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{100}=-1\cdots\textcircled{1}$$

$x=2$ 를 대입하면

$$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=2^{100}-1\cdots\textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{2}: 2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100})=2^{100}-2$$

$$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100}=2^{99}-1$$

$$\therefore m=99, k=-1 \text{ 이므로 } m+k=98$$

22. x 에 대한 항등식 $(x^2 - x - 1)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$ 에서 $a_1 + a_3 + a_5$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

양변에 $x = 1$ 을 대입하면,

$$-1 = a_0 + a_1 + \cdots + a_6 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면,

$$1 = a_0 - a_1 + \cdots + a_6 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}: -2 = 2(a_1 + a_3 + a_5)$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 = -1$$

23. $(1 - x - x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{49}x^{49} + a_{50}x^{50}$ 이라 할 때,

$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2^{24} ④ 2^{25} ⑤ 2^{50}

해설

$$(1 - x - x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{50}x^{50}$$

$x = 1$ 을 양변에 대입하면

$$-1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} \cdots \textcircled{1}$$

$x = -1$ 을 양변에 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{49} + a_{50} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}: 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}) = 0$$

$$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50} = 0$$

24. n 이 자연수일 때, $x^{2n}(x^2 + ax + b)$ 를 $(x + 2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $4^n(x + 2)$ 가 되도록 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 9

② 10

③ 11

④ 12

⑤ 13

해설

$$\begin{aligned} \text{(i) } f(x) &= x^{2n}(x^2 + ax + b) \\ &= (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2) \end{aligned}$$

$$f(-2) = 4^n(4 - 2a + b) = 0$$

$$\therefore b = 2a - 4$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } f(x) &= x^{2n}(x^2 + ax + 2a - 4) \\ &= x^{2n}(x + 2)(x + a - 2) \\ &= (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2) \end{aligned}$$

$$\therefore x^{2n}(x + a - 2) = (x + 2)Q(x) + 4^n$$

$x = -2$ 를 대입하면

$$4^n(-4 + a) = 4^n, -4 + a = 1$$

$$\therefore a = 5$$

$$b = 2a - 4 \text{ 에서 } b = 6$$

$$\therefore a + b = 11$$

25. 다항식 $2x^3 + ax^2 + x + b$ 가 $x^2 - x + 1$ 로 나누어떨어질 때, $a - b$ 의 값은?

① -4

② -2

③ 2

④ 3

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & 2x^3 + ax^2 + x + b \\ &= (x^2 - x + 1)(2x + c) \\ &= 2x^3 + (c - 2)x^2 + (2 - c)x + c \\ &\therefore a = c - 2, 1 = 2 - c, b = c \\ &c = 1 \text{ 이므로 } a = -1, b = 1 \\ &\therefore a - b = -2 \end{aligned}$$

26. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 이 $x^2 + 1$ 로 나누어떨어질 때, 상수 a, b 의 값을 정하면?

① $a = -1, b = 3$

② $a = 1, b = 3$

③ $a = 3, b = -1$

④ $a = -3, b = -1$

⑤ $a = 3, b = 1$

해설

$$\begin{aligned} & x^3 + ax^2 + bx + 3 \\ &= (x^2 + 1)(x + c) \\ &= x^3 + cx^2 + x + c \\ \therefore & a = c, b = 1, c = 3 \\ & \text{따라서 } a = 3, b = 1 \end{aligned}$$

27. 등식 $x^3 + ax^2 + 2x + b = (x^2 + x + 1)Q(x) + 2x + 1$ 이 x 에 대한
항등식일 때, $a + b$ 의 값은?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$Q(x) = x + c$ 라고 두고 전개하여 계수를 비교하면
 $a = 0, b = 0, c = -1$ 이므로 $a + b = 0$

해설

$x^3 + ax^2 + 2x + b$ 를 $x^2 + x + 1$ 로 직접 나눗셈을 하면,

$$\begin{array}{r} x^2+x+1 \overline{) \begin{array}{r} x^3+ax^2+2x+b \\ - (x^3+x^2+x) \\ \hline (a-1)x^2+(a-1)x+(a-1) \end{array}} \\ \underline{-(a-1)x^2+(a-1)x+(a-1)} \\ (2-a)x+b-a+1 \end{array}$$

$$2-a=2, b-a+1=1$$

$$a=0, b=0$$

28. x 에 관한 항등식 $x^n(x^2+ax+b) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$ 가 성립할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 5

해설

$x^n(x^2+ax+b) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$
위의 식에 $x=2$ 를 대입하면, $2^n(4+2a+b) = 0$
 $\therefore b = -2a - 4 (2^n \neq 0) \dots \textcircled{1}$
①을 준식에 대입하면,
 $x^n(x^2+ax-2a-4) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$
 $x^n(x-2)(x+a+2) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$
위의 식이 항등식이므로 다음 식도 항등식이다.
 $x^n(x+a+2) = (x-2)p(x) + 2^n$
다시 $x=2$ 를 대입하면,
 $2^n(4+a) = 2^n \quad \therefore a = -3$
 $a = -3$ 을 ①에 대입하면,
 $b = (-2)(-3) - 4 = 2$
 $\therefore a = -3, b = 2$
 $\therefore a+b = -1$

29. 다항식 $f(x) = x^4 + ax + b$ 가 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어지도록 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② -1 ③ 3 ④ -4 ⑤ -3

해설

$$\begin{aligned} \text{(i) } f(x) &= x^4 + ax + b = (x-1)^2 Q(x) \\ f(1) &= 1 + a + b = 0 \\ \therefore b &= -(a+1) \\ \text{(ii) } f(x) &= x^4 + ax - (a+1) = (x-1)^2 Q(x) \\ (x^4 - 1) + a(x-1) &= (x-1)^2 Q(x) \\ (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) + a(x-1) &= (x-1)^2 Q(x) \\ \therefore x^3 + x^2 + x + 1 + a &= (x-1)Q(x) \\ x=1 \text{을 대입하면 } 4 + a &= 0 \quad \therefore a = -4 \\ b = -(a+1) \text{에서 } b &= 3 \\ \therefore a + b &= -1 \end{aligned}$$

30. 두 조건 ㉠, ㉡를 모두 만족시키는 2차의 다항식 $f(x)$ 의 개수는?

㉠ $f(0) = -1$
㉡ $f(x^2)$ 은 $f(x)$ 로 나누어 떨어진다.

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 없다.

해설

$f(0) = -1$ 이므로
 $f(x) = ax^2 + bx - 1$ ($a \neq 0$)라 하면
 $f(x^2) = ax^4 + bx^2 - 1$ 이다.
 $f(x^2)$ 이 $f(x)$ 로 나누어 떨어지므로
그 몫을 $x^2 + cx + 1$ 이라 하면,
 $(ax^4 + bx^2 - 1) = (ax^2 + bx - 1)(x^2 + cx + 1)$
이 항등식이 되어야 한다.
계수비교에 의해 $ac + b = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $a + bc - 1 = b \cdots \textcircled{2}$
 $b - c = 0 \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{3}$ 에서 $c = b$, 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b(a + 1) = 0$
 $\therefore b = 0$ 또는 $a = -1$
(i) $b = 0$ 이면 $\textcircled{2}$ 에서 $a = 1$
(ii) $a = -1$ 이면 $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 에서 $b^2 - b - 2 = 0$
 $\therefore b = 2$ 또는 -1
 $\therefore (a, b) = (1, 0), (-1, 2), (-1, -1)$ 의 3 쌍