

1. 점 (1, 2)를 점 (3, -1)로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $2x - y + k = 0$ 은 점 (-1, 3)을 지나는 직선으로 옮겨진다. 이 때, 상수 k 의 값은?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

점 (1, 2)를 x 축의 방향으로 2만큼,
 y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면
점 (3, -1)로 옮겨진다.
따라서, 이러한 평행이동에 의하여
직선 $2x - y + k = 0$ 을 옮기면
 $2(x - 2) - (y + 3) + k = 0$
 $\therefore 2x - y + k - 7 = 0$
이 직선이 점 (-1, 3)을 지나므로
 $2 \cdot (-1) - 3 + k - 7 = 0$
 $\therefore k = 12$

2. 다음은 점 $P(a, b)$ 의 직선 $y = x$ 에 대해 대칭인 점 Q 의 좌표 (x, y) 를 구하는 과정이다.

에 알맞은 말을 차례대로 써 넣어라.

(1) $\overline{PQ}$ 의 중점 $\left(\frac{x+a}{2}, \frac{y+b}{2}\right)$ 은 직선
위에 있으므로 $\frac{y+b}{2} = \frac{x+a}{2}$
 $\therefore x - y = b - a \cdots \textcircled{1}$
(2) 직선 PQ 는 직선 $y = x$ 에 수직이므로
 $\frac{y-b}{x-a} = \text{$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 를 연립하여 x, y 를 구하면
 $x = \text{$, $y = \text{$ 이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

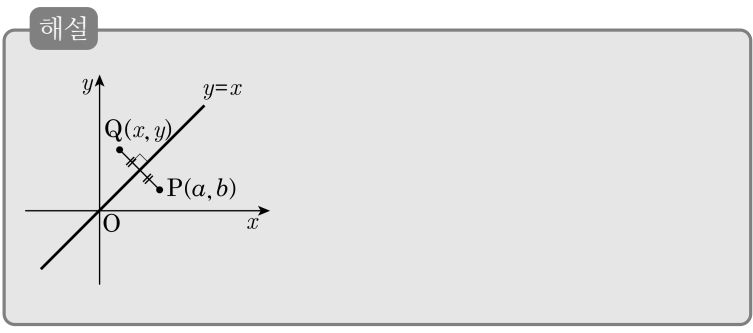
▶ 답 :

▷ 정답 : $y = x$

▷ 정답 : -1

▷ 정답 : b

▷ 정답 : a



3. 직선 $y = 2x$ 에 대하여 점 $P(a, b)$ 와 대칭인 점을 Q 라 한다. Q 를 x 축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점을 R 라고 하면, R 과 P 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이 된다고 한다. 이 때, $2a - 4b$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

R 과 $P(a, b)$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 $R(b, a)$ 이고
 Q 는 R 을 x 축으로 -1 만큼 이동한 것이므로 $Q(b-1, a)$ 이다.
 또, P 와 Q 는 $y = 2x$ 에 대하여 대칭이므로
 $\left(\frac{a+b-1}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ 는 $y = 2x$ 위의 점이고 $\overline{PQ}$ 와 $y = 2x$ 는 수직이다. $\therefore$ (선분 $\overline{PQ}$ 의 기울기) $= \frac{b-a}{a-b+1} = -\frac{1}{2} \dots \textcircled{1}$ 이고,
 $\frac{a+b}{2} = 2 \left(\frac{a+b-1}{2}\right) \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 에서 $a-b=1$
 $\textcircled{2}$ 에서 $a+b=2$
 $\therefore a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}, 2a-4b = 3-2 = 1$

4. 다음 안에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

- (1) $f(2a-x, y) = 0$ 은 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이다.

(2) $f(x, 2b-y) = 0$ 은 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이다.

(3) $f(2a-x, 2y-b) = 0$ 은 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이다.

(4) $f(-y, -x) = 0$ 은 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이다.

- ① 직선 $x = a$, 직선 $y = b$, 점 (a, b) , 직선 $y = -x$

② 직선 $x = a$, 직선 $y = -x$, 점 $(a, -b)$, 직선 $y = b$

③ 점 (a, b) , 직선 $y = b$, 직선 $x = a$, 직선 $y = -x$

④ 직선 $x = a$, 점 (a, b) , 직선 $y = b$, 직선 $y = -x$

⑤ 점 (a, b) , 직선 $x = a$, 직선 $y = b$, 직선 $y = -x$

해설

- (1) $f(x, y) = 0$ 의 x 대신 $2a-x$ 를 대입한 것이므로 직선 $x = a$ 에 대하여 대칭이동한 것이다.

(2) $f(x, y) = 0$ 의 y 대신 $2b-y$ 를 대입한 것이므로 직선 $y = b$ 에 대하여 대칭이동한 것이다.

(3) $f(x, y) = 0$ 의 x 대신 $2a-x$, y 대신 $2b-y$ 를 대입한 것이므로 점 (a, b) 에 대하여 대칭이동한 것이다.

(4) $f(x, y) = 0$ 의 x 대신 $-y$, y 대신 $-x$ 를 대입한 것이므로 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동한 것이다.

5. 직선 l 을 y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 다음 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(-1, 2)$ 에서의 접선과 일치하였다. 이때, 직선 l 의 방정식은?

- ① $y = \frac{1}{2}x - 8$ ② $y = \frac{1}{2}x - 4$ ③ $y = 2x + \frac{1}{2}$
④ $y = 2x - 4$ ⑤ $y = 2x - 8$

해설

직선 l 의 방정식을 $y = ax + b$ ($a \neq 0$) 로 놓자.
이때, 이것을 y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한
직선의 방정식은 $y = ax + b + 3$
다시 이것을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한
직선의 방정식은 $x = ay + b + 3$
즉, $x - ay - b - 3 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$
한편, 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(-1, 2)$ 에서의
접선의 방정식은 $y = \frac{1}{2}(x + 1) + 2$
즉, $x - 2y + 5 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 이 일치하므로 계수를 비교하면
 $a = 2, -b - 3 = 5$
 $\therefore a = 2, b = -8$
따라서, 구하는 직선 l 의 방정식은 $y = 2x - 8$

6. (3, 1)의 직선 $y = 2x + 3$ 에 대한 대칭점을 (a, b) 라 할 때, $a + b$ 는?

- ㉠ $\frac{4}{5}$ ㉡ 1 ㉢ $\frac{6}{5}$ ㉣ $\frac{5}{3}$ ㉤ 2

해설

점 (a, b) 와 (3, 1)을 지나는 직선은 직선 $y = 2x + 3$ 와 수직이다.

이 직선은 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ 로 나타낼 수 있다.

점 (a, b) 는 이 직선 위의 점이므로

$\left(a, -\frac{1}{2}a + \frac{5}{2}\right)$ 와 같다.

$\left(a, -\frac{1}{2}a + \frac{5}{2}\right)$ 는 직선 $y = 2x + 3$ 과의 거리가

점 (3, 1)과 직선 $y = 2x + 3$ 과의 거리와 같으므로

점과 직선 사이의 거리에서

$$\frac{|2 \cdot 3 + 3 - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{\left|2a + 3 + \frac{1}{2}a - \frac{5}{2}\right|}{\sqrt{5}}$$

$$|5a + 1| = 16$$

$$\therefore a = 3 \text{ 또는 } -\frac{17}{5}$$

(3, 1)의 대칭점이 (a, b) 이므로 $a \neq 3$,

$$a = -\frac{17}{5} \text{ 일 때, } b = \frac{21}{5}$$

$$\therefore a + b = \frac{4}{5}$$

7. 다음 중 원 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

- ① $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ ㉡ $x^2 + y^2 = 1$
③ $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ ④ $(x + 1)^2 + y^2 = 2$
⑤ $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면

반지름의 길이가 같아야 한다.

$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ 에서 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$

따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은

반지름의 길이가 1인 ㉡이다.

8. 원 $x^2 + (y - 1)^2 = 36$ 의 넓이를 이등분하는 직선 $y = mx + n$ 을 x 축의 방향으로 1만큼 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동하였더니 원 $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 49$ 의 넓이를 이등분하였다. 실수 m, n 에 대하여 $m + n$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

원의 넓이를 이등분하려면
원의 중심을 지나야 하므로
 $y = mx + n$ 은 점 $(0, 1)$ 을 지난다.
 $1 = n \cdots \textcircled{1}$
직선 $y = mx + n$ 를 x 축의 방향으로 1만큼,
 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면
 $y - 2 = m(x - 1) + n$ 이 직선이
점 $(4, -3)$ 을 지나므로
 $-5 = 3m + n \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $m = -2, n = 1$
 $\therefore m + n = -2 + 1 = -1$

9. 원 $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$ 을 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭 이동하면 원 $x^2 + y^2 = c$ 가 된다고 한다. 이 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① -15 ② -13 ③ 12 ④ 17 ⑤ 22

해설

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 20$$

$$y = ax + b \text{ 와 } (4, 2) \text{ } (0, 0)$$

선분은 서로 수직하므로

$$\frac{-2-0}{4-0} \times a = -1$$

$$\therefore a = 2$$

$y = ax + b$ 는 $(4, -2)$ 와 $(0, 0)$ 의 중점을 지나므로

$$\left(\frac{4+0}{2}, \frac{-2+0}{2} \right) = (2, -1)$$

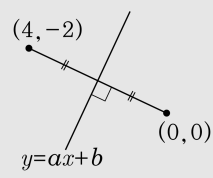
$$-1 = 2a + b$$

$$\therefore b = -5 \text{ } (\because a = 2)$$

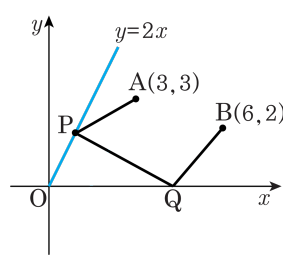
원을 대칭해도 반지름은 변하지 않으므로

$$\therefore c = 20$$

$$\therefore a + b + c = 2 - 5 + 20 = 17$$



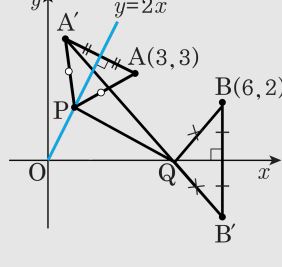
10. 좌표평면 위에 두 점 A (3,3), B (6,2) 와 직선 $y = 2x$ 위를 움직이는 점 P , x 축 위를 움직이는 점 Q 가 있다. 이때, $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값은?



- ① $\frac{11\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{11\sqrt{10}}{5}$
 ③ $\frac{13\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{13\sqrt{10}}{5}$
 ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

다음 그림과 같이 점 A (3,3) 을 직선 $y = 2x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하고 점 B 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라고 하면



$$\overline{AP} = \overline{A'P}, \overline{BQ} = \overline{B'Q} \text{ 이므로}$$

$$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'} \geq \overline{A'B'}$$

따라서, 구하는 최솟값은 선분 A'B' 의 길이이다.

이때, 점 A' (a,b) 라고 하면

직선 AA' 과 직선 $y = 2x$ 가 수직이므로

$$\frac{b-3}{a-3} \cdot 2 = -1$$

$$\therefore a + 2b = 9 \dots\dots \textcircled{\tiny{\Gamma}}$$

또한, 선분 AA' 의 중점 $\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+3}{2}\right)$ 은

직선 $y = 2x$ 위에 있으므로

$$\frac{b+3}{2} = 2 \cdot \frac{a+3}{2}$$

$$\therefore 2a - b = -3 \dots\dots \textcircled{\tiny{\Delta}}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = \frac{3}{5}, b = \frac{21}{5}$$

$$\therefore A' \left(\frac{3}{5}, \frac{21}{5} \right)$$

한편, 점 B' (6,-2) 이므로

$$\begin{aligned} \overline{A'B'} &= \sqrt{\left(6 - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(-2 - \frac{21}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{27}{5}\right)^2 + \left(-\frac{31}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1690}{25}} = \frac{13\sqrt{10}}{5} \end{aligned}$$

따라서, 구하는 최솟값은 $\frac{13\sqrt{10}}{5}$ 이다.