

1. 264의 소인수를 바르게 구한 것은?

- ① 2, 3, 11                      ② 1, 2, 3, 11                      ③  $2^2$ , 11  
④  $2^3$ , 3, 11                      ⑤ 2, 3, 5, 11

해설

$$264 = 2^3 \times 3 \times 11$$

2. 588 을 588 보다 작은 자연수  $a$  로 나누었더니 약수의 개수가 홀수인 자연수  $b$  가 되었다. 가능한  $b$  의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 249

해설

약수의 개수가 홀수인 수는 제곱수이므로

$$\frac{588}{a} = \frac{2^2 \times 3 \times 7^2}{a} = k^2 = b \text{ 라 하면,}$$

$a$  는 3,  $2^2 \times 3$ ,  $3 \times 7^2$  이 가능하다.

$$a = 3 \text{ 일 때, } b = 14^2 = 196$$

$$a = 2^2 \times 3 \text{ 일 때, } b = 7^2 = 49$$

$$a = 3 \times 7^2 \text{ 일 때, } b = 2^2 = 4$$

588 보다 작다고 했으므로  $a = 2^2 \times 3 \times 7^2$  일 때는 제외한다.

$$\therefore 196 + 49 + 4 = 249$$

3. 108 을 소인수분해 한 것으로 옳은 것은?

①  $4 \times 27$

②  $2^2 \times 3^3$

③  $2^2 \times 3^2$

④  $2^2 \times 3 \times 5$

⑤  $2^3 \times 3^2$

해설

$$\begin{array}{r} 2 \overline{)108} \\ 2 \overline{)54} \\ 3 \overline{)27} \\ 3 \overline{)9} \\ 3 \end{array}$$

4. 다음 <보기> 중 소인수분해를 올바르게 한 것을 모두 고르면?

보기

- |                                 |                       |
|---------------------------------|-----------------------|
| ㉠ $45 = 3^2 \times 5$           | ㉡ $28 = 2^2 \times 7$ |
| ㉢ $150 = 2 \times 3^2 \times 7$ | ㉣ $512 = 2^9$         |
| ㉤ $72 = 2^2 \times 3^3$         | ㉥ $96 = 2^5 \times 3$ |

- ① ㉠,㉡,㉢,㉣      ② ㉡,㉢,㉤,㉥      ③ ㉠,㉡,㉣,㉥  
④ ㉡,㉣,㉤,㉥      ⑤ ㉠,㉢,㉣,㉥

해설

- ㉢  $150 = 2 \times 3 \times 5^2$   
㉤  $72 = 2^3 \times 3^2$

5. 72의 소인수를 모두 구하면?

① 8, 9

② 2, 3

③  $2^3, 3^2$

④ 11, 51

⑤ 2, 36

해설

$72 = 2^3 \times 3^2$  이므로 소인수는 2와 3이다.  
 $\therefore 2, 3$

6. 18 에 적당한 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때 곱해야 할 자연수를 가장 작은 것부터 3 개를 써라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : 8

▷ 정답 : 18

해설

$18 = 2 \times 3^2$   
곱해야 할 자연수를  $x$  라 할 때,  
 $(2 \times 3^2) \times x = y^2$   
 $x = 2, 2 \times 2^2, 2 \times 3^2, \dots$   
 $= 2, 8, 18, \dots$

7.  $3^4 \times x$  는 약수의 개수가 10 개 인 자연수이다. 다음 중  $x$  의 값으로 알맞지 않은 것은?

① 2      ② 3      ③ 5      ④ 7      ⑤  $3^5$

해설

약수의 개수는  $3^4 \times x$  에서

$(4+1) \times (\square+1) = 5 \times 2 = 10$  또는  $(9+1) = 10$  이 될 수 있다.  
즉  $x$  가 될 수 있는 수는 3 과 서로소이고 지수가 1 인 수 또는  $3^5$  이다.

그러므로 알맞지 않은 것은 3 이다.

8. 2160 를 소인수분해하면  $a^x \times b^y \times c^z$  이다.  $z < y < x$  일 때,  $a + b + c - (x + y + z)$  의 값은?

① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

해설

$2160 = 2^4 \times 3^3 \times 5^1$  이므로  $a = 2, b = 3, c = 5, x = 4, y = 3, z = 1$  이다.

$\therefore a + b + c - (x + y + z) = 2 + 3 + 5 - (4 + 3 + 1) = 10 - 8 = 2$

9. 48에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때, 곱하여야 할 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

48을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 48} \\ 2 \overline{) 24} \\ 2 \overline{) 12} \\ 2 \overline{) 6} \\ 3 \end{array}$$

$48 = 2^4 \times 3$  이므로  $2^4 \times 3 \times \square$  가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한  $\square$ 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 3이다.

10.  $\frac{252}{a}$  가 어떤 자연수의 제곱이라고 한다.  $a$  가 1 보다 클 때,  $a$  가 될 수 있는 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$  이므로 지수가 홀수인 수 7 을 나누어 주면  $252 \div 7 = 36 = 6 \times 6$  이 되어 6 의 제곱이 된다.

11.  $\frac{72}{n}$  가 어떤 자연수의 제곱이 되게 하는 자연수  $n$  은 모두 몇 개인가?

- ① 1 개      ② 2 개      ③ 3 개      ④ 4 개      ⑤ 5 개

해설

$$72 = 2^3 \times 3^2,$$

$\frac{72}{n}$  가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위해서

$n = 2, 2 \times 3^2, 2^3, 2^3 \times 3^2$  의 4 개이다.

12.  $\frac{252}{A} = B^2$  을 만족하는 자연수  $A, B$  에 대하여  $B$  의 최댓값은?
- ① 2                      ② 3                      ③ 6                      ④ 8                      ⑤ 14

해설

252 를 소인수분해하면 다음과 같다.

2

)252

2

)126

3

)63

3

)21

7

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$  이므로  $\frac{2^2 \times 3^2 \times 7}{A} = B^2$  을 만족하는  $B$  의 값  
중에서 가장 큰 자연수는  $A = 7$  일 때  $2 \times 3 = 6$  이다.

13.  $3^a \times 5^b$  이 45 를 약수로 가질 때, 두 자연수  $a, b$  의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$3^a \times 5^b$  이  $45 = 3^2 \times 5$  을 약수로 가지므로,  $a$  는 2 이상의 자연수,  $b$  는 1 이상의 자연수가 되어야 한다.  
그 중 최솟값은  $a = 2, b = 1$  일 때이므로  $a + b = 3$  이다.

14. 다음 수를 약수의 개수가 적은 것부터 순서대로 나열한 것은?

보기

㉠  $2^5 \times 3$

㉡  $2^4 \times 5^2$

㉢  $2 \times 3 \times 7$

㉣  $2 \times 3 \times 5 \times 11$

㉤  $3^2 \times 5^3 \times 7$

① ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

② ㉡, ㉢, ㉠, ㉤, ㉣

③ ㉢, ㉠, ㉡, ㉣, ㉤

④ ㉢, ㉡, ㉤, ㉣, ㉠

⑤ ㉣, ㉠, ㉤, ㉡, ㉢

해설

㉠ 12 개 ㉡ 15 개 ㉢ 8 개 ㉣ 16 개 ㉤ 24 개  
따라서 ㉢, ㉠, ㉡, ㉣, ㉤ 순서이다.

15. 180 의 약수의 개수와  $2 \times 3^2 \times 5^a$  의 약수의 개수가 같을 때, 자연수  $a$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$  , 180 의 약수의 개수 :

$(2 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 18$  ( 개)

$2 \times 3^2 \times 5^a$  의 약수의 개수 :

$(1 + 1) \times (2 + 1) \times (a + 1) = 18$  ( 개)

$\therefore a = 2$

16.  $3^x \times 5^2 \times 20$  의 약수의 개수가 72 일 때,  $x$  를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$3^x \times 5^2 \times 20 = 2^2 \times 3^x \times 5^3$  이므로  
약수의 개수는  
 $(2+1) \times (x+1) \times (3+1) = 72$  (개)  
 $\therefore x = 5$

17. 1 부터 200 까지의 자연수 중에서 약수의 개수가 3 개인 자연수는 모두 몇 개인가?

① 5 개      ② 6 개      ③ 7 개      ④ 8 개      ⑤ 9 개

해설

자연수  $n$  의 약수의 개수가 3 개이기 위해서는  
1 과  $n$  이외에 약수가 한 개만 더 있어야하므로  
자연수  $n$  은 소수의 완전제곱수이어야 한다.  
따라서 1 부터 200 까지의 완전제곱수를 구하면  
 $13^2 = 169 < 200$  이고  $17^2 = 289 > 200$  이므로  
200 이하인 소수의 완전제곱수는  
 $2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2$  이다.

18. 13 이하의 자연수의 곱을 소인수분해 했을 때 소인수의 합을  $a$ , 소인수의 지수의 합을  $b$  라 하자. 이때,  $a - b$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 13 \\ &= 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \\ &\quad \times (2 \times 5) \times 11 \times (2^2 \times 3) \times 13 \\ &= 2^{10} \times 3^5 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13 \\ &a = 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 = 41 \\ &b = 10 + 5 + 2 + 1 + 1 + 1 = 20 \\ &\therefore a - b = 41 - 20 = 21 \end{aligned}$$

19.  $24 \times a$  가 어떤 자연수  $A$ 의 제곱이 될 때,  $A$ 의 최솟값은?

① 9

② 12

③ 36

④ 54

⑤ 100

해설

$$24 \times a = 2^3 \times 3 \times a$$

$$\text{가장 작은 } a = 2 \times 3 = 6$$

$$A^2 = 2^3 \times 3 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = (12)^2$$

$$\therefore A = 12$$

20.  $T, S, L$  은  $T \times S \times L = 715$  을 만족하는 서로 다른 자연수이다. 이 때,  $T + S + L$  의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 29

해설

$715 = 5 \times 11 \times 13$  이고, 합의 최솟값을 구하므로,  $T, S, L$  는 5, 11, 13 이 된다.

21. 약수의 개수가 12 개인 수 중에서 가장 작은 수와 세 번째로 작은 수의 차를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

소인수가 1 개일 때,  $12 = 11 + 1$  이므로

$2^{11}, 3^{11}, \dots$

소인수가 2 개일 때,  $12=4 \times 3=6 \times 2$

$2^3 \times 3^2 = 72, 2^2 \times 3^3 = 108, 2^3 \times 5^2 = 200, \dots$

$2^5 \times 3 = 96, 2^5 \times 5 = 160, \dots$

소인수가 3 개일 때,  $12 = 3 \times 2 \times 2$

$2^2 \times 3 \times 5 = 60, 2^2 \times 3 \times 7 = 84, 2 \times 3^2 \times 5 = 90, \dots$

따라서 가장 작은 수는 60, 세 번째로 작은 수는 84이다.

$\therefore 84 - 60 = 24$

22.  $5^4 \times \square$ 의 약수의 개수가 15 개일 때,  $\square$  안에 들어갈 수 있는 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\square = a^x$ ( $a$ 는소수) 라고 하면  $5^4 \times a^x$ 의 약수의 개수는 15 개이므로

$(4 + 1) \times (x + 1) = 15, x + 1 = 3, x = 2$  이다.

또한 가장 작은 자연수가 되기 위해서는  $a = 2$  이다.

따라서  $\square = a^x = 2^2 = 2 \times 2 = 4$  이다.

23. 90 에 가능한 한 작은 수  $a$  를 곱하여 어떤 수  $b^2$  이 되도록 할 때,  $a+b$  의 값은? (단,  $a, b$  는 자연수)

① 10

② 20

③ 30

④ 40

⑤ 50

해설

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$  이므로 곱할 수 있는 수는

$2 \times 5 \times (\text{자연수})^2$  의 꼴이다.

$$\therefore a = 2 \times 5 \times 1^2 = 10$$

$$90 \times a = 2 \times 3^2 \times 5 \times 2 \times 5$$

$$= 2^2 \times 3^2 \times 5^2$$

$$= (2 \times 3 \times 5)^2$$

$$\therefore b = 30$$

따라서  $a+b = 10+30 = 40$  이다.

24.  $2^a \times 3^b$  의 약수의 개수가 6 개 일 때,  $2^a \times 3^b$  이 가장 작은 자연수가 되도록 하는  $a, b$  를 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 :  $a = 2$

▷ 정답 :  $b = 1$

해설

자연수  $A$  가  $A = a^m \times b^n$  으로 소인수분해될 때 ( $A$  의 약수의 개수)는  $(m + 1) \times (n + 1)$  개 이다.

$$\begin{aligned} 6 &= 1 \times 6 = (0 + 1) \times (5 + 1) \\ &= 6 \times 1 = (5 + 1) \times (0 + 1) \\ &= 2 \times 3 = (1 + 1) \times (2 + 1) \\ &= 3 \times 2 = (2 + 1) \times (1 + 1) \end{aligned}$$

이므로,  $(a, b)$  의 순서쌍으로 가능한 순서쌍은 모두  $(0, 5), (5, 0), (1, 2), (2, 1)$  이다.

i)  $(a, b) = (0, 5)$  일 때,  
구하고자 하는 수는  $2^0 \times 3^5 = 1 \times 3^5 = 243$  이다.

ii)  $(a, b) = (5, 0)$  일 때,  
구하고자 하는 수는  $2^5 \times 3^0 = 2^5 \times 1 = 32$  이다.

iii)  $(a, b) = (1, 2)$  일 때,  
구하고자 하는 수는  $2^1 \times 3^2 = 18$  이다.

iv)  $(a, b) = (2, 1)$  일 때,  
구하고자 하는 수는  $2^2 \times 3^1 = 12$  이다.

따라서 i), ii) iii), iv) 에서 가장 작은 수는 12 이다.

25. 10 부터 100 사이의 수 중에서 약수의 개수가 3개인 수는 모두 몇 개인가?

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

해설

약수의 개수가 3 개인 수는 (소수)<sup>2</sup> 이므로  
10 이상 100 이하의 수 중 소수의 제곱이 되는 수는  $5^2$ ,  $7^2$  의 2 개