1. x 에 대한 다항식 $3x^3y+5y-xz+9xy-4$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

> ㉠ 내림차순으로 정리하면
> $3yx^3+(9y-z)x+5y-4$ 이다.
> ㉡ 오름차순으로 정리하면
> $5y-4+(9y-z)x+3yx^3$ 이다.
> ㉢ 주어진 다항식은 x 에 대한 3 차식이다.
> ㉣ x^3 의 계수는 3이다.
> ㉤ 상수항은 -4 이다.

① ㉠, ㉢ ② ㉠, ㉡, ㉢
③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤
⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉣ x^3 의 계수는 $3y$ 이다.
㉤ 상수항은 $5y-4$ 이다.

2. 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $A \ominus B$와 $A \otimes B$을 다음과 같이 정의하기로 한다.

$A \ominus B = A - 3B$, $A \otimes B = (A + B)B$

$P = 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3$, $Q = x^3 + x^2y + xy^2$이라 할 때,

$(P \ominus Q) \otimes Q$를 x, y에 관한 다항식으로 나타내면?

① $x^4y^2 + xy^5$ ② $x^4y^2 - xy^5$ ③ $x^3y^2 - xy^4$

④ $x^3y^2 + xy^4$ ⑤ $2x^3y^2 - xy^4$

해설

정의에 따라 $(P \ominus Q) \otimes Q$를 변형하면

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (P - 3Q) \otimes Q \\ &= (P - 3Q + Q)Q \\ &= (P - 2Q)Q \quad \cdots ①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P - 2Q \\ &= 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3 - 2(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= xy^2 - y^3\end{aligned}$$

이므로 ①식은

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (xy^2 - y^3)(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 - x^3y^3 \\ &\quad - x^2y^4 - xy^5 \\ &= x^4y^2 - xy^5\end{aligned}$$

3. 다항식 $x^3 - 2$를 $x^2 - 2$로 나눈 나머지는?

① 2　② -2　③ $-2x - 2$

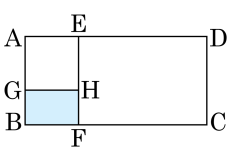
④ $2x + 2$　⑤ $2x - 2$

해설

$$\frac{x^3 - 2}{x^2 - 2} = \frac{x^3 - 2x + 2x - 2}{x^2 - 2} = x + \frac{2x - 2}{x^2 - 2}$$

$\therefore$ 몫은 x, 나머지는 $2x - 2$

4. 다음 그림의 사각형 AGHE, 사각형 EFCD는 정사각형이고, $\overline{AD} = a$, $\overline{AB} = b$ 일때, 사각형 GBFH의 넓이는?



① $a^2 - 2ab - b^2$ ② $a^2 + 3b^2 - 2ab$

③ $-a^2 + 3ab - 2b^2$ ④ $-a^2 + 3ab - b^2$

⑤ $-a^2 + 2ab - b^2$

해설

$\square GBFH = \square ABCD - \square AGHE - \square EFCD$

$= ab - (a-b)^2 - b^2 = ab - (a^2 - 2ab + b^2) - b^2$

$= -a^2 + 3ab - 2b^2$

5. $\dfrac{2x+1}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$가 $x\neq 1$인 모두 실수 x에 대해 항상 성립 하도록 $a,\ b,\ c$를 구할 때, $a+b+c$의 값은?

① 2 ② -2 ③ 1 ④ -1 ⑤ 0

해설

우변의 분모를 통분하면

$$\frac{a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)}{x^3-1}$$

$$=\frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{x^3-1}$$

$$\therefore\ \frac{2x+1}{x^3-1}=\frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{x^3-1}$$

분자의 계수를 비교하면

$a+b=0,\ a-b+c=2,\ a-c=1$

세 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-1,\ c=0$

$\therefore a+b+c=0$

6. 임의의 x 에 대하여 $x^3-1=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 를 만족하는 상수 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 합 $a+b+c+d$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

양변에 $x=0$ 을 대입 하면
$-1=a+b+c+d$
$\therefore\ a+b+c+d=-1$

해설

$x^3-1=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$
$=(x+1)\{a(x+1)^2+b(x+1)+c\}+d$
$=(x+1)[(x+1)\{a(x+1)+b\}+c]+d$ 이므로
x^3-1 을 $x+1$ 로 연속으로 나눌 때
차례대로 나오는 나머지가 d, c, b가 되고 마지막 몫이 a 이다.

-1	1	0	0	-1	
		-1	1	-1	
-1	1	-1	1	-2	← d
		-1	2		
-1	1	-2	3	←	c
		-1			
	1	-3	← b		
	↑				
	a				

7. k의 값에 관계없이 $(2k^2-3k)x-(k+2)y-(k^2-4)z=28$이 항상 성립하도록 x,y,z의 값을 정할 때, $3x+y+z$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

주어진 식을 k에 대해 정리하면

$(2x-z)k^2-(3x+y)k-(2y-4z+28)=0$

$\therefore\ 2x-z=0, 3x+y=0, 2y-4z+28=0$

$z=2x,\ y=-3x$을 $2y-4z+28=0$에 대입하면

$x=2,\ y=-6,\ z=4$

$\therefore\ 3x+y+z=4$

8. 다항식 $x^3 - 4x^2 + ax + b$가 $x^2 + 2$로 나누어 떨어질 때, $3a + b$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$f(x) = x^3 - 4x^2 + ax + b$
$= (x^2 + 2)(x - \alpha)$ 라 놓을 수 있다.
$x^3 - \alpha x^2 + 2x - 2\alpha = x^3 - 4x^2 + ax + b$
$\therefore \ \alpha = 4, \ \ a = 2, \ \ b = -8$
$\therefore \ 3a + b = -2$

9. 임의의 실수 x 에 대하여 등식 $2x^3-3x^2-x+1=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ 가 성립할 때, $a+b+c+d$ 의 값은? (단, a,b,c,d 는 상수)

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

해설

계수의 합 $a+b+c+d$ 를 구할 때는 우변의 문자부분을 모두 1 이 되게 하는 x 값을 양변에 대입하면 간단하게 그 값을 구할 수 있다.
이 문제에서는 $x=2$ 를 양변에 대입하면
$16-12-2+1=a+b+c+d$
$\therefore\ a+b+c+d=3$

해설

a,b,c,d 의 값을 각각 구하기 위해서는 아래와 같이 조립제법을 사용할 수 있다.
$a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$
$=(x-1)[(x-1)\{a(x-1)+b\}+c]+d$
즉, $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d,c,b 가 되고 마지막 몫이 a 이다.

1	2	−3	−1	1	
		2	−1	−2	
1	2	−1	−2	−1	← d
		2	1		
1	2	1	−1	←	c
		2			
	2	3	← b		
	↑				
	a				

$\therefore\ a+b+c+d=3$

10. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x-1$로 나누면 나누어떨어지고, $x+2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, $m-n$의 값은?

① -2 ② -3 ③ -4 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$x^3+mx^2+nx+1=(x-1)Q(x)$$
$$=(x+2)Q'(x)+3$$

양변에 $x=1$을 대입하면

$1+m+n+1=0$

$\therefore m+n=-2\cdots$㉠

양변에 $x=-2$을 대입하면

$-8+4m-2n+1=3$

$\therefore 2m-n=5\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $m=1, n=-3$

$\therefore m-n=4$

11. 다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 나머지가 $-x+4$이다. 다항식 $f(x+1)$을 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x+1$　② $-x+3$　③ $x-1$
④ $2x$　⑤ $2x-3$

해설

$f(x)=(x^2-4)P(x)-x+4$
$=(x+2)(x-2)P(x)-x+4$
$\therefore f(-2)=6,\ f(2)=2$
$f(x+1)=(x^2+2x-3)Q(x)+ax+b$
$=(x+3)(x-1)Q(x)+ax+b$
$x=-3$을 대입하면 $f(-2)=-3a+b=6$
$x=1$을 대입하면 $f(2)=a+b=2$
$\therefore\ a=-1,\ b=3$
따라서 나머지는 $-x+3$

12. 다항식 $2x^3 + 3x^2 + ax + b$가 $x + 2$로 나누어 떨어질 때, $2a - b$의 값은?

① 28 ② 12 ③ 6 ④ -4 ⑤ -12

해설

준식을 $f(x)$라 하면 $f(-2) = 0$이므로
$-16 + 12 - 2a + b = 0$에서 $2a - b = -4$

13. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $i=1$일 때, $a+b+c$의 값을 옳게 구한 것은?

1	1	a	b	c
		d	e	f
	1	g	h	i

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

1	1	a	b	c
		1	$a+1$	$a+b+1$
	1	$a+1$	$a+b+1$	$a+b+c+1$

이때 $a+b+c+1=1$이므로

$a+b+c=0$

따라서 ③이다.

14. 다음 다항식의 일차항의 계수는?

$$(1+x+x^2)^2(1+x)+(1+x+x^2+x^3)^3$$

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

i) $(1+x+x^2)^2(x+1)$ 의 일차항의 계수
: $(1+x+x^2)^2$ 의 일차항에 1을 곱할 때,
계수= 2
: $(1+x+x^2)^2$ 의 상수항에 x를 곱할 때,
계수= 1

ii) $(1+x+x^2+x^3)^3$ 의 일차항의 계수
$x+x^2+x^3=Y$라 하면,
$(Y+1)^3=Y^3+3Y^2+3Y+1$
$3Y=3x+3x^2+3x^3$
일차항의 계수= 3, 다른 항에는 일차항이 없다.

i), ii) 에서 $2+1+3=6$

15. $x^2+x+1=0$일 때, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^2+x+1=0$에서 양변을 x로 나누면

$x+\dfrac{1}{x}=-1$

$\therefore x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\dfrac{1}{x}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=-1-3\cdot(-1)=2$

16. 다항식 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때의 나머지가 3이고, x^2-4x+3으로 나눌 때의 나머지가 $3x$일 때, $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때의 나머지는?

① 3　② $3x+3$　③ $3x-3$

④ $6x-9$　⑤ $9x+6$

해설

$f(x)=(x-2)(x-1)Q(x)+3$
$f(x)=(x-3)(x-1)Q'(x)+3x$
$\therefore\ f(2)=3,\ f(3)=9$ $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때의 나머지를 $ax+b$라 하면
$f(x)=(x-2)(x-3)Q''(x)+ax+b$
$f(2)=2a+b=3,\ f(3)=3a+b=9$
$a=6,\ b=-9$
$\therefore$나머지는 $6x-9$

17. x^{30}을 $x-3$으로 나눌 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면 $Q(x)$의 계수의 총합(상수항 포함)과 R과의 차는?

① $\frac{1}{2}(3^{29}+1)$ ② $\frac{1}{2}\cdot 3^{30}$ ③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
④ $\frac{1}{2}(3^{30}+1)$ ⑤ $\frac{1}{2}(3^{29}-1)$

해설

$x^{30}=(x-3)Q(x)+R$
$x=3$을 대입하면 $3^{30}=R$
$Q(x)$의 계수의 총합은 $Q(1)$과 같으므로
$x=1$을 대입하면 $1=-2Q(1)+3^{30}$

$\therefore\ Q(1)=\dfrac{3^{30}-1}{2}$

$\therefore\ R-Q(1)=3^{30}-\dfrac{3^{30}-1}{2}=\dfrac{3^{30}+1}{2}=\dfrac{1}{2}(3^{30}+1)$

18. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2 - x + 1 = 0$, 양변에 $x + 1$을 곱하면,

$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$

$x^3 + 1 = 0$, $x^3 = -1$에서 $x^5 = x^3 \times x^2 = -x^2$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = -\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \cdots\cdots ①$$

$x^2 - x + 1 = 0$를 x로 나누어 정리한다.

$$x + \frac{1}{x} = 1$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = -1$$

① 에 대입하면, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 1$