

1. 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + 5 = 0$ 의 한 근이 $2 - i$ 일 때, 실수 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$x^3 + ax^2 + bx + 5 = 0$ 의 세 근: $2 - i, 2 + i, \alpha$

세 근의 합: $-a = 4 + \alpha \cdots \textcircled{1}$

세 근의 곱: $-5 = (2 + i)(2 - i)\alpha = 5\alpha$

$\therefore \alpha = -1$, $\textcircled{1}$ 식에 대입하면 $a = -3$

$b = (2 + i)(2 - i) + (2 + i) \cdot (-1) + (2 - i) \cdot (-1) = 5 - 4 = 1$

$\therefore a^2 + b^2 = 10$

2. a, b 가 유리수일 때, $x = 1 + \sqrt{2}$ 가 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$ 의 근이 된다. 이 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

유리계수 방정식이므로 $1 + \sqrt{2}$ 가 근이면 $1 - \sqrt{2}$ 도 근이다.

주어진 방정식의 세 근을 $1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, \alpha$ 라 하면

$$(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + \alpha(1 + \sqrt{2}) + \alpha(1 - \sqrt{2}) = a \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\alpha(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -b \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 1$

3. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 - ax^2 + 5x - b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$x^3 - ax^2 + 5x - b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이므로 다른 한 근을 $1 - \sqrt{2}$, 나머지 한 근을 β 라 하면

$$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2})\beta + (1 - \sqrt{2})\beta = 5$$

$$-1 + 2\beta = 5, 2\beta = 6 \quad \therefore \beta = 3$$

$$\text{따라서, } a = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + 3 = 5$$

$$b = (1 + \sqrt{2}) \cdot (1 - \sqrt{2}) \cdot 3 = -3 \text{이므로}$$

$$a + b = 5 + (-3) = 2$$

4. 삼차방정식 $x^3 - ax - b = 0$ 의 한 근이 $1 - \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

방정식 $x^3 - ax - b = 0$ 의 계수가 유리수이므로

세 근을 $1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, \alpha$ 라고 하면

$$(1 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) + \alpha = 0 \quad \cdots \textcircled{A}$$

$$(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2})\alpha + (1 - \sqrt{2})\alpha = -a \quad \cdots \textcircled{B}$$

$$(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})\alpha = b \quad \cdots \textcircled{C}$$

①에서 $\alpha = -2$ 를 ②에 대입하면

$$-a = 1 - 2 - 2 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} = -5 \quad \therefore a = 5$$

$$\alpha = -2 \text{를 } \textcircled{C} \text{에 대입하면 } b = -2(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 2$$

$$\therefore a + b = 5 + 2 = 7$$

5. 어떤 정육면체의 밑변의 가로 길이를 1 cm 줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm 씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답: cm

▷ 정답: 2cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면

$$\text{조건으로부터 } (x-1)(x+2)(x+3) = \frac{5}{2}x^3,$$

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = \frac{5}{2}x^3,$$

$$\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0 \text{ 에서}$$

$$3x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = 0 \text{ 을 풀면 } x = 2(\text{cm})$$