

1. x^{100} 을 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때, 나머지는?

- ① $100x + 101$ ② $100x - 99$ ③ $-100x - 99$
④ $-99x - 98$ ⑤ $99x + 100$

해설

구하는 나머지를 $ax + b$ 라 하면
 $x^{100} = (x+1)^2 Q(x) + ax + b$
 x^{100} 을 $x+1$ 로 나누면 나머지는 1이므로
 $x^{100} = (x+1)^2 Q(x) + a(x+1) + 1 \ (\Rightarrow a+1=b)$
 $x^{100} - 1 = (x+1)\{(x+1)Q(x) + a\}$
 $(x^2)^{50} - 1 = (x+1)\{(x+1)Q(x) + a\}$
 $(x^2 - 1)\{(x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \cdots + x^2 + 1\}$
 $= (x+1)\{(x+1)Q(x) + a\}$
 $(x+1)(x-1)\{(x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \cdots + x^2 + 1\}$
 $= (x+1)\{(x+1)Q(x) + a\}$
 $(x-1)\{(x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \cdots + x^2 + 1\} = (x+1)Q(x) + a$
양변에 $x = -1$ 을 대입하면
 $(-1-1)(1^{49} + 1^{48} + \cdots + 1 + 1) = a$
 $a = -100, a+1 = b$ 에서 $b = -99$
 $\therefore$ 구하는 나머지는 $-100x - 99$

2. 어떤 일차식 $g(x)$ 에 대하여

$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - g(x) = \{(x - \alpha)(x - \beta)\}^2$ 가 성립한다. 이 때, $\alpha\beta$ 의 값은?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

(우변) = $\{(x - \alpha)(x - \beta)\}^2$
= $\{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\}^2$
= $x^4 - 2(\alpha + \beta)x^3$
+ $\{(\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta\}x^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta)x + \alpha^2\beta^2$
= $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - g(x)$
 $g(x)$ 가 일차식이므로 양변의 계수를 비교하면
 $-2(\alpha + \beta) = 2, (\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta = -3$
 $\therefore \alpha + \beta = -1, \alpha\beta = -2$

3. x 에 대한 다항식 $x^{10}(x^2 + ax + b)$ 를 $(x - 2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $2^{10}(x - 2)$ 일 때, 상수 a, b 에 대하여 $3b - 2a$ 의 값은?

- ① 3
- ② 6
- ③ 8
- ④ 10
- ⑤ 12

해설

$$\begin{aligned} x^{10}(x^2 + ax + b) &= (x - 2)^2 Q(x) + 2^{10}(x - 2) \\ x^{10}(x^2 + ax + b) &= (x - 2) \{ (x - 2) Q(x) + 2^{10} \} \text{이므로} \\ x^2 + ax + b &= (x - 2)(x - \alpha) \text{라 할 수 있다.} \\ x^{10}(x - 2)(x - \alpha) &= (x - 2) \{ (x - 2) Q(x) + 2^{10} \} \\ \therefore x^{10}(x - \alpha) &= (x - 2) Q(x) + 2^{10} \\ \text{양변에 } x = 2 \text{를 대입하면} \\ 2^{10}(2 - \alpha) &= 2^{10} \therefore \alpha = 1 \\ \therefore x^2 + ax + b &= (x - 2)(x - 1) \\ &= x^2 - 3x + 2 \\ a = -3, \quad b &= 2 \\ \therefore 3b - 2a &= 12 \end{aligned}$$

4. $f(x)$ 가 x 의 다항식일 때 $(x^2 - 2)(x^4 + 1)f(x) = x^8 + ax^4 + b$ 가 x 에 대한 항등식이 될 때 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$(x^2 - 2)(x^4 + 1)f(x) = x^8 + ax^4 + b$ 에서

$x^2 = 2$ 를 대입하면 $0 = 16 + 4a + b \cdots \textcircled{1}$

$x^4 = -1$ 을 대입하면 $0 = 1 - a + b \cdots \textcircled{2}$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -3, b = -4$

$\therefore a + b = -7$

5. 4차의 다항식 $f(x)$ 가 $f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{2}, f(2) = \frac{2}{3}, f(3) = \frac{3}{4},$

$f(4) = \frac{4}{5}$ 를 만족시킬 때, $f(5)$ 의 값을 구하면?

- ① 0
- ② 1
- ③ $\frac{5}{6}$
- ④ $\frac{2}{3}$
- ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

주어진 조건에 따라
 $f(n) = \frac{n}{n+1} (n = 0, 1, 2, 3, 4)$
 $(n+1)f(n) - n = 0$
 $g(x) = (x+1)f(x) - x$ 로 놓으면
 $g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = 0$
그런데 $g(x)$ 는 다항식이므로 나머지정리에 의해
 $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 를 인수로 갖는다.
또, $f(x)$ 가 4차식이므로 $g(x)$ 는 5차식이다.
 $\therefore g(x) = ax(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) (a \neq 0) \cdots \textcircled{1}$
그런데, $g(-1) = 1$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서
 $g(-1) = -(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)a = 1$
 $\therefore a = -\frac{1}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}$
 $g(x) = (x+1)f(x) - x$
 $= -\frac{1}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$
 $g(5) = 6f(5) - 5 = -\frac{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} = -1$
 $\therefore f(5) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

6. 모든 실수 x 에 대하여 $x^{10} + 1 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{10}(x-1)^{10}$ 이 성립할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 513

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{10} \cdots \textcircled{1}$$

양변에 $x = 2$ 을 대입하면

$$2^{10} + 1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} \cdots \textcircled{2}$$

① + ②에 의해

$$2^{10} + 2 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10})$$

$$\therefore (a_0 + a_2 + \cdots + a_{10}) = 2^9 + 1 = 513$$

7. 모든 실수 x 에 대하여 등식 $x^{100}-1=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{100}(x-1)^{100}$ 이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100}=2^m+k$ 이다. $m+k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 98

해설

$x=0$ 을 대입하면

$$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{100}=-1\cdots\textcircled{1}$$

$x=2$ 를 대입하면

$$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=2^{100}-1\cdots\textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{2}: 2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100})=2^{100}-2$$

$$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100}=2^{99}-1$$

$$\therefore m=99, k=-1 \text{ 이므로 } m+k=98$$

8. $(x^3 - x^2 - 2x + 1)^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{15}(x-1)^{15}$
일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{14}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면
 $1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{15} \cdots \textcircled{1}$
양변에 $x = 2$ 를 대입하면
 $1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{15} \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면
 $2 = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{14})$ 이다.
 $\therefore a_0 + a_2 + \cdots + a_{14} = 1$

9. 10차 다항식 $P(x)$ 가 $P(k) = \frac{k}{k+1}$ (단, $k = 0, 1, 2, \dots, 10$)을 만족시킬 때, $P(11)$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

해설

$$P(k) = \frac{k}{k+1} \Rightarrow (k+1)P(k) - k = 0$$

$$f(x) = (x+1)P(x) - x \text{라 하면}$$

$$f(x) \text{는 } f(0) = f(1) = f(2) = \dots$$

$$= f(10) = 0 \text{인 다항식이다.}$$

$$\therefore f(x) = ax(x-1)(x-2)\dots(x-10)$$

$$\text{또, } f(-1) = 1 = a(-1)(-2)\dots(-11)$$

$$= -a \cdot 11! (\text{단, } 11! = 1 \times 2 \times \dots \times 11)$$

$$\therefore a = -\frac{1}{11!}$$

$$f(11) = 12P(11) - 11$$

$$= -\frac{1}{11!} \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 1 = -1$$

$$\therefore P(11) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

10. $(x-2)^4 = a(x-3)^4 + b(x-3)^3 + c(x-3)^2 + d(x-3) + e$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $2c - bd$ 의 값은?

- ① -8
- ② -4
- ③ 0
- ④ 4
- ⑤ 8

해설

x 에 대한 항등식 이므로 x 에 대한 적당한 수를 넣어 식을 만든다.

i) $x = 3 \Rightarrow e = 1$
ii) $x = 2 \Rightarrow a - b + c - d + 1 = 0$
iii) $x = 4 \Rightarrow a + b + c + d + 1 = 16$
iv) $x = 4 \Rightarrow 16a - 8b + 4c - 2d + 1 = 1$
v) $x = 5 \Rightarrow 16a + 8b + 4c - 2d + 1 = 1$
위 5개의 식을 연립하여 a, b, c, d 의 값을 구한다.
 $a = 1, b = 4, c = 6, d = 4, e = 1$
 $\therefore 2c - bd = -4$

해설

$x - 2 = t$ 라 하면 $x - 3 = t - 1$
(준식) : $t^4 = a(t-1)^4 + b(t-1)^3 + c(t-1)^2 + d(t-1) + e$
다음처럼 조립제법으로 $t - 1$ 로 계속 나눌 때, 나오는 나머지가 순서대로 e, d, c, b 이고 마지막 몫이 a 이다.

1	1	0	0	0	0
		1	1	1	1
1	1	1	1	1	1 = e
		1	2	3	
1	1	2	3	4 = d	
		1	3		
1	1	3	6 = c		
		1			
a = 1	4 = b				

$\therefore 2c - bd = -4$