

1. x^{100} 을 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때, 나머지는?

① $100x + 101$

② $100x - 99$

③ $-100x - 99$

④ $-99x - 98$

⑤ $99x + 100$

해설

구하는 나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$x^{100} = (x+1)^2 Q(x) + ax + b$$

x^{100} 을 $x+1$ 로 나누면 나머지는 1이므로

$$x^{100} = (x+1)^2 Q(x) + a(x+1) + 1 \quad (\Rightarrow a+1=b)$$

$$x^{100} - 1 = (x+1) \{(x+1)Q(x) + a\}$$

$$(x^2)^{50} - 1 = (x+1) \{(x+1)Q(x) + a\}$$

$$(x^2 - 1) \{(x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \cdots + x^2 + 1\}$$

$$= (x+1) \{(x+1)Q(x) + a\}$$

$$(x+1)(x-1) \{(x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \cdots + x^2 + 1\}$$

$$= (x+1) \{(x+1)Q(x) + a\}$$

$$(x-1) \{(x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \cdots + x^2 + 1\} = (x+1)Q(x) + a$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$(-1-1)(1^{49} + 1^{48} + \cdots + 1 + 1) = a$$

$$a = -100, a+1=b \text{에서 } b = -99$$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-100x - 99$

2. 어떤 일차식 $g(x)$ 에 대하여

$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - g(x) = \{(x - \alpha)(x - \beta)\}^2$ 가 성립한다. 이 때, $\alpha\beta$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}(\text{우변}) &= \{(x - \alpha)(x - \beta)\}^2 \\&= \{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\}^2 \\&= x^4 - 2(\alpha + \beta)x^3 \\&\quad + \{(\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta\}x^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta)x + \alpha^2\beta^2 \\&= x^4 + 2x^3 - 3x^2 - g(x)\end{aligned}$$

$g(x)$ 가 일차식이므로 양변의 계수를 비교하면

$$-2(\alpha + \beta) = 2, (\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta = -3$$

$$\therefore \alpha + \beta = -1, \alpha\beta = -2$$

3. x 에 대한 다항식 $x^{10}(x^2 + ax + b)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $2^{10}(x-2)$ 일 때, 상수 a, b 에 대하여 $3b - 2a$ 의 값은?

① 3

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$x^{10}(x^2 + ax + b) = (x-2)^2 Q(x) + 2^{10}(x-2)$$

$$x^{10}(x^2 + ax + b) = (x-2) \{ (x-2) Q(x) + 2^{10} \} \text{이므로}$$

$$x^2 + ax + b = (x-2)(x-\alpha) \text{라 할 수 있다.}$$

$$x^{10}(x-2)(x-\alpha) = (x-2) \{ (x-2) Q(x) + 2^{10} \}$$

$$\therefore x^{10}(x-\alpha) = (x-2) Q(x) + 2^{10}$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$2^{10}(2-\alpha) = 2^{10} \therefore \alpha = 1$$

$$\therefore x^2 + ax + b = (x-2)(x-1)$$

$$= x^2 - 3x + 2$$

$$a = -3, b = 2$$

$$\therefore 3b - 2a = 12$$

4. $f(x)$ 가 x 의 다항식일 때 $(x^2 - 2)(x^4 + 1)f(x) = x^8 + ax^4 + b$ 가 x 에 대한 항등식이 될 때 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$(x^2 - 2)(x^4 + 1)f(x) = x^8 + ax^4 + b$ 에서

$x^2 = 2$ 를 대입하면 $0 = 16 + 4a + b \cdots \textcircled{1}$

$x^4 = -1$ 을 대입하면 $0 = 1 - a + b \cdots \textcircled{2}$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -3, b = -4$

$\therefore a + b = -7$

5. 4차의 다항식 $f(x)$ 가 $f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{2}, f(2) = \frac{2}{3}, f(3) = \frac{3}{4}, f(4) = \frac{4}{5}$ 를 만족시킬 때, $f(5)$ 의 값을 구하면?

- ① 0 ② 1 ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

주어진 조건에 따라

$$f(n) = \frac{n}{n+1} (n=0, 1, 2, 3, 4)$$

$$(n+1)f(n) - n = 0$$

$$g(x) = (x+1)f(x) - x \text{로 놓으면}$$

$$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = 0$$

그런데 $g(x)$ 는 다항식이므로 나머지정리에 의해

$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 를 인수로 갖는다.

또, $f(x)$ 가 4차식이므로 $g(x)$ 는 5차식이다.

$$\therefore g(x) = ax(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) (a \neq 0) \cdots \textcircled{A}$$

그런데, $g(-1) = 1$ 이므로 $\textcircled{A}$ 에서

$$g(-1) = -(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)a = 1$$

$$\therefore a = -\frac{1}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}$$

$$g(x) = (x+1)f(x) - x$$

$$= -\frac{1}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$g(5) = 6f(5) - 5 = -\frac{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} = -1$$

$$\therefore f(5) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

6. 모든 실수 x 에 대하여 $x^{10} + 1 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{10}(x-1)^{10}$ 이 성립할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 513

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{10} \cdots \textcircled{1}$$

양변에 $x = 2$ 을 대입하면

$$2^{10} + 1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} \cdots \textcircled{2}$$

① + ② 에 의해

$$2^{10} + 2 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10})$$

$$\therefore (a_0 + a_2 + \cdots + a_{10}) = 2^9 + 1 = 513$$

7. 모든 실수 x 에 대하여 등식 $x^{100} - 1 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{100}(x-1)^{100}$ 이 성립할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{100} = 2^m + k$ 이다. $m + k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 98

해설

$x = 0$ 을 대입하면

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{100} = -1 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$x = 2$ 를 대입하면

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = 2^{100} - 1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}} + \textcircled{\text{㉡}}: 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{100}) = 2^{100} - 2$$

$$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{100} = 2^{99} - 1$$

$$\therefore m = 99, k = -1 \text{ 이므로 } m + k = 98$$

8. $(x^3 - x^2 - 2x + 1)^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{15}(x-1)^{15}$
일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{14}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{15} \cdots \textcircled{㉠}$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{15} \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 을 하면

$$2 = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{14}) \text{이다.}$$

$$\therefore a_0 + a_2 + \cdots + a_{14} = 1$$

9. 10차 다항식 $P(x)$ 가 $P(k) = \frac{k}{k+1}$ (단, $k = 0, 1, 2, \dots, 10$)을 만족시킬 때, $P(11)$ 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{5}{6}$

⑤ 1

해설

$$P(k) = \frac{k}{k+1} \Rightarrow (k+1)P(k) - k = 0$$

$$f(x) = (x+1)P(x) - x \text{라 하면}$$

$$f(x) \text{ 는 } f(0) = f(1) = f(2) = \dots$$

$$= f(10) = 0 \text{인 다항식이다.}$$

$$\therefore f(x) = ax(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$$

$$\text{또, } f(-1) = 1 = a(-1)(-2)\cdots(-11)$$

$$= -a \cdot 11! \text{ (단, } 11! = 1 \times 2 \times \cdots \times 11)$$

$$\therefore a = -\frac{1}{11!}$$

$$f(11) = 12P(11) - 11$$

$$= -\frac{1}{11!} \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdots 1 = -1$$

$$\therefore P(11) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

10. $(x-2)^4 = a(x-3)^4 + b(x-3)^3 + c(x-3)^2 + d(x-3) + e$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $2c - bd$ 의 값은?

① -8

② -4

③ 0

④ 4

⑤ 8

해설

x 에 대한 항등식 이므로 x 에 대한 적당한 수를 넣어 식을 만든다.

$$\text{i) } x = 3 \Rightarrow e = 1$$

$$\text{ii) } x = 2 \Rightarrow a - b + c - d + 1 = 0$$

$$\text{iii) } x = 4 \Rightarrow a + b + c + d + 1 = 16$$

$$\text{iv) } x = 4 \Rightarrow 16a - 8b + 4c - 2d + 1 = 1$$

$$\text{v) } x = 5 \Rightarrow 16a + 8b + 4c - 2d + 1 = 1$$

위 5개의 식을 연립하여 a, b, c, d 의 값을 구한다.

$$a = 1, b = 4, c = 6, d = 4, e = 1$$

$$\therefore 2c - bd = -4$$

해설

$$x - 2 = t \text{ 라 하면 } x - 3 = t - 1$$

$$(\text{준식}) : t^4 = a(t-1)^4 + b(t-1)^3 + c(t-1)^2 + d(t-1) + e$$

다음처럼 조립제법으로 $t-1$ 로 계속 나눌 때, 나오는 나머지가 순서대로 e, d, c, b 이고 마지막 몫이 a 이다.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \underline{1} = e \\ & & 1 & 2 & 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 2 & 3 & \underline{4} = d \\ & & 1 & 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 3 & \underline{6} = c \\ & & 1 & \end{array}$$

$$a = 1 \quad \underline{4} = b$$

$$\therefore 2c - bd = -4$$