1. 다항식 x^3+ax+b가 다항식 x^2-x+1로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로
$x^2=x-1$을 대입하면
$ax+(b-1)=0$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로,
$a=0,\ b-1=0$
$\therefore\ a=0,\ b=1$
$\therefore a+b=1$

해설

x^3+ax+b
$=(x^2-x+1)Q(x)$
$=(x^2-x+1)(x+b)$
$\therefore\ b=1,\ a=0$

2. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m-n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

나머지 정리를 이용한다.
주어진 식에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면,
$(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)+1=5\cdots$ ㉠
$(2)^3+m(2)^2+n\cdot 2+1=3\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하면,
$m=\frac{2}{3}$, $n=-\frac{13}{3}$
$\therefore\ m-n=5$

3. $f(x)=x^2-ax+1$ 이 $x-1$ 로 나누어 떨어질 때 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

해설

$f(1)=1^2-a\cdot 1+1=0$

$\therefore\ a=2$

4. x^3-2x^2+a 가 $x+3$ 로 나누어 떨어지도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=45$

해설

$f(-3)=(-3)^3-2(-3)^2+a=a-45=0$

$\therefore\ a=45$

5. 다항식 $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 12$가 $x - 2$로 나누어 떨어지고 또, $x - 3$으로도 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어지려면
$f(2) = 24 + 4a + 2b + 12 = 0$
$\therefore\ 4a + 2b + 36 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠
또, $f(x)$ 가 $x - 3$ 으로 나누어 떨어지려면
$f(3) = 81 + 9a + 3b + 12 = 0$
$\therefore\ 9a + 3b + 93 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -13,\ b = 8$

6. $f(x)$가 x의 다항식일 때 $(x^2-2)(x^4+1)f(x)=x^8+ax^4+b$가 x에 대한 항등식이 될 때 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$(x^2-2)(x^4+1)f(x)=x^8+ax^4+b$에서
$x^2=2$를 대입하면 $0=16+4a+b\cdots$①
$x^4=-1$을 대입하면 $0=1-a+b\cdots$②
①, ②를 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-4$
$\therefore\ a+b=-7$

7. $\frac{2x+3a}{4x+1}$ 가 x에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12a=2$

해설

$\frac{2x+3a}{4x+1}=k$ (일정값 $=k$) 라 놓으면 $2x+3a=k(4x+1)$ 에서

$(2-4k)x+3a-k=0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로,

$2-4k=0$, $3a-k=0$

$k=\frac{1}{2}$ 이므로 $3a=k$에서 $a=\frac{1}{6}$

$\therefore$ $12a=2$

8. $\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}$ 가 $x-y-1 \neq 0$ 인 어떤 x, y의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1} = k$라 놓으면

$2x+ay-b = k(x-y-1)$

x, y에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$

위의 식이 x, y에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0$, $a+k=0$, $-b+k=0$

$\therefore$ $k=2$, $a=-2$, $b=2$

$\therefore$ $a-b=-4$

9. x의 모든 값에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 상수 $a,\ b,\ c$의 값의 합을 구하여라.

$$x^3+1=(x-1)(x-2)(x-3)+a(x-1)(x-2)+b(x-1)+c$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

x에 대한 항등식이므로

$x=1$일 때, $2=c\cdots\cdots$㉠

$x=2$일 때, $9=b+c\cdots\cdots$㉡

$x=3$일 때, $28=2a+2b+c\cdots\cdots$㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=6,\ b=7,\ c=2$

$\therefore\ a+b+c=15$

10. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+3을 $(x-1)^2$을 나누었을 때 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로
x^3+ax^2+bx+3
$=(x-1)^2(x+k)+2x+1$
$=x^3+(k-2)x^2+(3-2k)x+k+1$
양변의 계수를 비교하면
$a=k-2,\ b=3-2k,\ 3=k+1$
$k=2$이므로 $a=0,\ b=-1$
$\therefore\ a-b=0-(-1)=1$

11. 모든 실수 x에 대하여 $x^{10}+1=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{10}(x-1)^{10}$이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 513

해설

양변에 $x=0$을 대입하면
$1=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{10}\cdots$①
양변에 $x=2$을 대입하면
$2^{10}+1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}\cdots$②
①+②에 의해
$2^{10}+2=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10})$
$\therefore (a_0+a_2+\cdots+a_{10})=2^9+1=513$

12. $(x^3 - x^2 - 2x + 1)^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{15}(x-1)^{15}$ 일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{14}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

양변에 $x = 0$을 대입하면

$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{15} \cdots$ ㉠

양변에 $x = 2$를 대입하면

$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{15} \quad \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면

$2 = 2\,(a_0 + a_2 + \cdots + a_{14})$ 이다.

$\therefore\ a_0 + a_2 + \cdots a_{14} = 1$

13. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 3이고, $x+1$로 나눈 나머지가 -1일 때, $(x^2+x+2)f(x)$를 x^2-1로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

나머지 정리에 의해 $f(1)=3, f(-1)=-1$

$(x^2+x+2)f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$x=1, x=-1$ 을 대입한다.

$4f(1)=12=a+b\cdots$㉠

$2f(-1)=-2=-a+b\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면,

$a=7,\ b=5$

$\therefore$ 나머지 $R(x)=7x+5$

$R(1)=12$

14. x에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 1$를 $x + 1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

$$\begin{array}{c|cccc} k & 1 & a & b & 1 \\ & & c & d & 1 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & \boxed{2} \end{array}$$

① $a = 3$ ② $b = 2$ ③ $c = -1$
④ $d = -3$ ⑤ $k = -1$

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & a & b & 1 \\ & & -1 & -a+1 & -b+a-1 \\ \hline & 1 & a-1 & b-a+1 & \boxed{-b+a} \end{array}$$

이때 $k = -1$, $c = -1$, $d = -a + 1$, $b - a + 1 = -1$, $-b + a = 2$ 이므로

$k = -1$, $c = -1$, $a = 4$, $b = 2$, $d = -3$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

15. 어떤 일차식 $g(x)$에 대하여
$x^4+2x^3-3x^2-g(x)=\left\{(x-\alpha)(x-\beta)\right\}^2$가 성립한다. 이 때, $\alpha\beta$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{우변}) &= \{(x-\alpha)(x-\beta)\}^2 \\
&= \left\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right\}^2 \\
&= x^4-2(\alpha+\beta)x^3 \\
&\quad + \left\{(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta\right\}x^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+\alpha^2\beta^2 \\
&= x^4+2x^3-3x^2-g(x)
\end{aligned}
$$

$g(x)$가 일차식이므로 양변의 계수를 비교하면
$-2(\alpha+\beta)=2,\ (\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=-3$
$\therefore\ \alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-2$

16. 모든 실수 x에 대하여 등식 $x^{100}-1=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{100}(x-1)^{100}$이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100}=2^m+k$이다. $m+k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 98

해설

$x=0$을 대입하면

$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{100}=-1\cdots$㉠

$x=2$를 대입하면

$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=2^{100}-1\cdots$㉡

㉠ + ㉡: $2(a_0+a_2+a_6+\cdots+a_{100)}=2^{100}-2$

$\therefore\ a_0+a_2+a_6+\cdots+a_{100}=2^{99}-1$

$\therefore\ m=99,\ k=-1$이므로 $m+k=98$

17. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(x)+g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 나누어 떨어지고, $f(x)-g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 나머지가 2이다. 다음 [보기]의 다항식 중에서 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것을 모두 고르면?

㉠ $x+f(x)$	㉡ $x-g(x)$
㉢ $x+f(x)g(x)$	

① ㉠　② ㉢　③ ㉠,㉡
④ ㉠,㉢　⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

$f(x)+g(x)=(x+1)Q(x)$
$f(x)-g(x)=(x+1)Q'(x)+2$
$x=-1$ 을 두 식에 각각 대입하면
$f(-1)+g(-1)=0 \cdots$ ①
$f(-1)-g(-1)=2 \cdots$ ②
①, ②을 연립하여 풀면 $f(-1)=1, g(-1)=-1$
보기의 식 중에서 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것은 $x=-1$ 을 대입하면 식의 값이 0 이 된다.
㉠ $-1+f(-1)=-1+1=0$
㉡ $-1-g(-1)=-1+1=0$
㉢ $-1+f(-1)g(-1)=-1+1\times(-1)=-2$
∴ ㉠, ㉡

18. x에 대한 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 5이고, 그 몫을 다시 $x+3$으로 나눈 나머지가 3일 때, $xP(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

x에 대한 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$,
$Q(x)$를 $x+3$으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면
$P(x) = (x-2)Q(x)+5, Q(x) = (x+3)Q_1(x)+3$이므로
$P(x) = (x-2)\{(x+3)Q_1(x)+3\}+5$
$= (x-2)(x+3)Q_1(x)+3x-1$
$\therefore\ P(-3) = -9-1 = -10$
따라서 $xP(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는
$-3P(-3) = -3\times(-10) = 30$

해설

나머지정리에 의해 $Q(-3) = 3$
$P(x) = (x-2)Q(x)+5$에서 양변에 x를 곱하면
$xP(x) = x(x-2)Q(x)+5x \cdots ①$
나머지정리에 의해 $xP(x)$를 $x+3$로 나눈 나머지는 $-3P(-3)$이다.
①의 양변에 $x=-3$을 대입하면
$-3P(-3) = -3\cdot(-5)Q(-3)-15$
$Q(-3) = 3$을 대입하면 $-3P(-3) = 30$

19. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를 $x^2+3x-15$으로 나누면 나머지가 12이다. 또 $f(x)-g(x)$를 $x^2+3x-15$로 나누면 나머지가 -2이다.
이때, $f(x)$를 $x^2+3x-15$으로 나눈 나머지는?

① 5　　② 10　　③ 15　　④ 20　　⑤ 24

해설

$f(x)+g(x)=\left(x^2+3x-15\right)Q_1(x)+12\cdots$ ㉠
$f(x)-g(x)=\left(x^2+3x-15\right)Q_2(x)-2\cdots$ ㉡
㉠ + ㉡을 하면
$2f(x)=\left(x^2+3x-15\right)\left(Q_1(x)+Q_2(x)\right)+10$
$f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2+3x-15\right)\left(Q_1(x)+Q_2(x)\right)+5$
$\therefore$ 나머지는 5

20. 이차식 $f(x)$를 각각 $x-3$, $x+1$로 나눈 나머지는 같고, $f(1)=0$일 때, $\frac{f(4)}{f(-4)}=\frac{n}{m}$ (m, n은 서로소)이다. 이 때, $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$f(1)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$을 인수로 갖는다.

$\therefore\ f(x)=(x-1)(ax+b)$

$f(3)=f(-1)$ 이므로 $2(3a+b)=-2(-a+b)$

$\therefore\ a=-b$

$$\frac{f(4)}{f(-4)}=\frac{3(4a+b)}{-5(-4a+b)}=\frac{-9b}{-25b}=\frac{9}{25}$$

$\therefore\ m=25,\ n=9$

21. x에 대한 다항식 $x^{10}(x^2+ax+b)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지가 $2^{10}(x-2)$일 때, 상수 a, b에 대하여 $3b-2a$의 값은?

① 3 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$x^{10}(x^2+ax+b) = (x-2)^2 Q(x) + 2^{10}(x-2)$

$x^{10}\left(x^2+ax+b\right) = (x-2)\{(x-2)Q(x)+2^{10}\}$이므로

$x^2+ax+b = (x-2)(x-\alpha)$라 할 수 있다.

$x^{10}(x-2)(x-\alpha) = (x-2)\{(x-2)Q(x)+2^{10}\}$

$\therefore\ x^{10}(x-\alpha) = (x-2)Q(x)+2^{10}$

양변에 $x=2$를 대입하면

$2^{10}(2-\alpha) = 2^{10}\ \therefore \alpha = 1$

$$\begin{aligned}\therefore\ x^2+ax+b &= (x-2)(x-1)\\ &= x^2-3x+2\end{aligned}$$

$a=-3,\ b=2$

$\therefore\ 3b-2a = 12$

22. x^{100} 을 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때, 나머지는?

① $100x+101$　② $100x-99$　③ $-100x-99$
④ $-99x-98$　⑤ $99x+100$

해설

구하는 나머지를 $ax+b$ 라 하면
$x^{100}=(x+1)^2Q(x)+ax+b$
x^{100} 을 $x+1$ 로 나누면 나머지는 1 이므로
$x^{100}=(x+1)^2Q(x)+a(x+1)+1$ $(\Rightarrow a+1=b)$
$x^{100}-1=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$
$(x^2)^{50}-1=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$
$(x^2-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}$
$=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$
$(x+1)(x-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}$
$=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$
$(x-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}=(x+1)Q(x)+a$
양변에 $x=-1$ 을 대입하면
$(-1-1)(1^{49}+1^{48}+\cdots+1+1)=a$
$a=-100$, $a+1=b$ 에서 $b=-99$
$\therefore$ 구하는 나머지는 $-100x-99$

23. 10차 다항식 $P(x)$가 $P(k)=\frac{k}{k+1}$(단, $k=0, 1, 2, \cdots, 10$)을 만족시킬 때, $P(11)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{5}{6}$　⑤ 1

해설

$P(k)=\frac{k}{k+1} \Rightarrow (k+1)P(k)-k=0$

$f(x)=(x+1)P(x)-x$라 하면

$f(x)$는 $f(0)=f(1)=f(2)=\cdots$

$=f(10)=0$인 다항식이다.

$\therefore\ f(x)=ax(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$

또, $f(-1)=1=a(-1)(-2)\cdots(-11)$

$=-a\cdot 11!$(단, $11!=1\times 2\times\cdots\times 11$)

$\therefore\ a=-\frac{1}{11!}$

$f(11)=12P(11)-11$

$=-\frac{1}{11!}\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot\cdots\cdot 1=-1$

$\therefore\ P(11)=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

24. 4차의 다항식 $f(x)$가 $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(2) = \frac{2}{3}$, $f(3) = \frac{3}{4}$, $f(4) = \frac{4}{5}$를 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하면?

① 0　② 1　③ $\frac{5}{6}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{1}{2}$

해설

주어진 조건에 따라
$f(n) = \frac{n}{n+1}(n = 0, 1, 2, 3, 4)$
$(n+1)f(n) - n = 0$
$g(x) = (x+1)f(x) - x$로 놓으면
$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = 0$
그런데 $g(x)$는 다항식이므로 나머지정리에 의해
$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$를 인수로 갖는다.
또, $f(x)$가 4차식이므로 $g(x)$는 5차식이다.
$\therefore\ g(x) = ax(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(a \neq 0) \cdots$ ㉠
그런데, $g(-1) = 1$이므로 ㉠에서
$g(-1) = -(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)a = 1$
$\therefore\ a = -\frac{1}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}$
$g(x) = (x+1)f(x) - x$
$= -\frac{1}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$
$g(5) = 6f(5) - 5 = -\frac{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} = -1$
$\therefore\ f(5) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

25. $(x-2)^4 = a(x-3)^4 + b(x-3)^3 + c(x-3)^2 + d(x-3) + e$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $2c - bd$ 의 값은?

① -8　　② -4　　③ 0　　④ 4　　⑤ 8

해설

x 에 대한 항등식 이므로 x 에 대한 적당한 수를 넣어 식을 만든다.

i) $x = 3 \Rightarrow e = 1$

ii) $x = 2 \Rightarrow a - b + c - d + 1 = 0$

iii) $x = 4 \Rightarrow a + b + c + d + 1 = 16$

iv) $x = 4 \Rightarrow 16a - 8b + 4c - 2d + 1 = 1$

v) $x = 5 \Rightarrow 16a + 8b + 4c - 2d + 1 = 1$

위 5개의 식을 연립하여 a, b, c, d 의 값을 구한다.

$a = 1,\ b = 4,\ c = 6,\ d = 4,\ e = 1$

$\therefore 2c - bd = -4$

해설

$x - 2 = t$ 라 하면 $x - 3 = t - 1$

(준식) : $t^4 = a(t-1)^4 + b(t-1)^3 + c(t-1)^2 + d(t-1) + e$

다음처럼 조립제법으로 $t - 1$ 로 계속 나눌 때, 나오는 나머지가 순서대로 e, d, c, b 이고 마지막 몫이 a 이다.

$$\begin{array}{r|rrrrrl}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{1} & =e \\
 & & 1 & 2 & 3 & & \\
\hline
1 & 1 & 2 & 3 & \boxed{4} & & =d \\
 & & 1 & 3 & & & \\
\hline
1 & 1 & 3 & \boxed{6} & & & =c \\
 & & 1 & & & & \\
\hline
a= & 1 & \boxed{4} & =b & & &
\end{array}$$

$\therefore 2c - bd = -4$