1. 등식 $a(x+1)^2+b(x+1)+cx^2=3x-1$가 모든 x의 값에 대하여 항상 성립할 때 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $\frac{a}{c}+b$의 값을 구하면?

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -2 ⑤ -1

해설

좌변을 전개해서 계수비교하면

$(a+c)\,x^2+(2a+b)\,x+a+b=3x-1$

$\therefore a+c=0,\ 2a+b=3,\ a+b=-1$

$\therefore a=4,\ b=-5,\ c=-4$

$\therefore \frac{a}{c}+b=-6$

2. 등식 $\frac{a}{1+i}+\frac{b}{1-i}=-5$를 만족하는 두 실수 $a+b$의 값을 구하시오 (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

주어진 식의 양변에 $(1+i)(1-i)$를 곱하면
$a(1-i)+b(1+i)=-10,\ (a+b)+(b-a)i=-10$
$\therefore a+b=-10,\ b-a=0$

3. 이차방정식 $2x^2 - 6x + 3 = 0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 아래 표에서 옳은 것의 개수는?

㉠ $\alpha + \beta = 3$	㉡ $\alpha^2 + \beta^2 = 6$
㉢ $\alpha\beta = -3$	㉣ $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = 2$
㉤ $(\alpha - 1)(\beta - 1) = \frac{1}{2}$	

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$\alpha + \beta = 3$, $\alpha\beta = \frac{3}{2}$

㉠ $\alpha + \beta = 3$ (○)

㉡ $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 9 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 6$ (○)

㉢ $\alpha\beta = \frac{3}{2} \neq -3$ (×)

㉣ $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = \frac{\beta - \alpha}{\beta\alpha}$

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 9 - 4 \cdot \frac{3}{2} = 3 \quad |\alpha - \beta| = \sqrt{3}$

$\therefore \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \neq 2$ (×)

㉤ $\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = \frac{3}{2} - 3 + 1 = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$ (×)

4. $a^2+b^2+c^2=9,\ ab+bc+ca=9,\ a+b+c$의 값은?

① $-3\sqrt{2}$　② $-2\sqrt{3}$　③ $\pm 3\sqrt{3}$

④ $\pm 3\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{6}$

해설

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\\ &= 9+18=27\end{aligned}$$

$\therefore\ a+b+c=\pm 3\sqrt{3}$

5. 이차방정식 $x^2-2mx+m+6=0$의 두 근이 모두 1보다 작을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하면?

① $m \le -6$ ② $m \le -4$ ③ $m \le -2$

④ $m \le 0$ ⑤ $m \le 2$

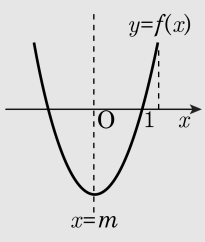
해설

$f(x)=x^2-2mx+m+6=(x-m)^2-m^2+m+6$으로 놓으면

$\frac{D}{4}=m^2-1\cdot(m+6)=m^2-m-6$

$f(1)=1-2m+m+6=-m+7$

두 근이 모두 1보다 작으려면 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



따라서,

(i) 판별식 : $\frac{D}{4}=m^2-m-6 \ge 0$

$(m+2)(m-3) \ge 0$

$\therefore m \le -2$ 또는 $m \ge 3$ ····· ㉠

(ii) 경계값의 부호 : $f(1)=-m+7>0$

$\therefore m<7$ ····· ㉡

(iii) 축 : $m<1$ ····· ㉢

㉠, ㉡, ㉢으로부터 구하는 m의 값의 범위는 $m \le -2$