1. 두 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{1,\ 2\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 8개

해설

1이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
2가 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
3이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
따라서 X에서 Y로의 함수의 개수는
$2 \times 2 \times 2 = 8$(개)

2. 함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f^{-1}(1) = 2$, $f(1) = 2$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$f(2) = 2a + b = 1, \quad f(1) = a + b = 2$
연립하면 $a = -1, \ b = 3$
$\therefore \ f(3) = 3a + b = 0$

3. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+4} \times \dfrac{2x^2+3x+1}{x^2-4x+3} \div \dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+3x-4}$ 을 간단히 하면 ?

① $\dfrac{4}{x-3}$ ② $\dfrac{1}{x+4}$ ③ $\dfrac{2}{x+2}$ ④ 1 ⑤ 0

해설

(주어진 식)

$$= \frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+4)} \times \frac{(x+1)(2x+1)}{(x-1)(x-3)} \div \frac{(x-2)(2x+1)}{(x-1)(x+4)}$$

$$= \frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+4)} \times \frac{(x+1)(2x+1)}{(x-1)(x-3)} \times \frac{(x-1)(x+4)}{(x-2)(2x+1)} = 1$$

4. 함수 $y=\dfrac{ax+1}{x-1}$ 의 역함수가 그 자신이 되도록 a 의 값을 정하면?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 0

해설

$y=\dfrac{ax+1}{x-1}$ 에서 $y(x-1)=ax+1$

$yx-y=ax+1,\ yx-ax=1+y$

$x(y-a)=1+y,\ x=\dfrac{1+y}{y-a}$

$\therefore\ y^{-1}=\dfrac{x+1}{x-a}$

역함수가 본래 함수와 같으므로

$\dfrac{x+1}{x-a}=\dfrac{ax+1}{x-1}$

$\therefore a=1$

5. 다음 무리식의 값이 실수가 되는 실수 x 의 값의 범위는?

$$\sqrt{3x^2 + 13x + 4}$$

① $x \le -4$ 또는 $x \ge -\frac{1}{3}$
② $x \le -\frac{1}{3}$ 또는 $x \ge 4$
③ $x \le \frac{1}{3}$ 또는 $x \ge 4$
④ $-4 \le x \le \frac{1}{3}$
⑤ $-\frac{1}{3} \le x \le 4$

해설

$3x^2 + 13x + 4 \ge 0$

$(3x + 1)(x + 4) \ge 0$

$\therefore\ x \le -4$ 또는 $x \ge -\frac{1}{3}$

6. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 일 때, 다음 식의 값은?

$$\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

① $3(\sqrt{3} + \sqrt{2})$　② $3(\sqrt{3} - \sqrt{2})$　③ 9
④ $5(\sqrt{3} + \sqrt{2})$　⑤ $7(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

해설

(주어진 식) $= \dfrac{\dfrac{x^3 + y^3}{(xy)^3}}{\dfrac{x + y}{xy}}$

$= \dfrac{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}{(x+y)(xy)^2}$

$= \dfrac{(x+y)^2 - 3xy}{(xy)^2}$

조건에서 $x + y = 2\sqrt{3}$, $xy = 1$

$\therefore$ (주어진 식)$= \dfrac{(2\sqrt{3})^2 - 3 \cdot 1^2}{1} = 9$

7. 다음 중 정의역이 $\{0, 1, 2\}$ 인 함수 f 의 그래프가 될 수 있는 것은?

① $\{(0,1),(1,2)\}$
② $\{(0,1),(1,1),(2,1)\}$
③ $\{(1,2),(1,0),(2,2)\}$
④ $\{(0,1),(0,2),(2,0)\}$
⑤ $\{(2,1),(2,2),(2,3)\}$

해설

$f(0)=a,\ f(1)=b,\ f(2)=c$ 라 하면,
함수 f 의 그래프는
$(0,a),(1,b),(2,c)$ 의 꼴이어야 한다.

8. $X = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y = \left\{y | y\text{는 정수}\right\}$ 일 때, 함수 $f : X \to Y$ 가 $f(x) = (x^2\text{을 5로 나눈 나머지})$로 정의할 때, 함수 f 의 치역에 있는 모든 원소의 합은 얼마인가?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

$f(x) = (x^2\text{을 5로 나눈 나머지})$ 이므로

$f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(2) = 4,\ f(3) = 4,\ f(4) = 1,\ f(5) = 0$

$\therefore\ \{f(x) \mid x \in X\} = \{0,\ 1,\ 4\}$

따라서 모든 원소의 합은 $0 + 1 + 4 = 5$

9. 두 집합 $A=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ 에 대하여 A 에서 B 로의 함수 f 가 $x \in A$ 인 모든 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 를 만족시킬 때, 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

집합 A 에서 B 로의 함수 f 가
$f(-x)=-f(x)$ 를 만족시키려면
-1 이 대응할 수 있는 원소는
$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ 의 5 가지.
0 이 대응할 수 있는 원소는
$f(-0)=-f(0)$ 에서, $2f(0)=0$,
즉 0 의 1 가지
1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(-1)$ 의 1 가지
따라서, 함수 f 의 개수는 $5\times1\times1=5$ (개)

10. $f(x) = 2x - 3$일 때, $f(f(x)) = f(f(f(x)))$를 만족하는 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(f(x)) = 4x - 9$, $f(f(f(x))) = 8x - 21$ 이므로
$4x - 9 = 8x - 21$
$\therefore\ x = 3$

11. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 (x \geq 0) \\ x + 1 (x < 0) \end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(5) + g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$g(5) = a$ 라 하면 $f^{-1}(5) = a$ 에서 $f(a) = 5$
그런데 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) = x^2 + 1 \geq 1$ 이므로
$f(a) = a^2 + 1 = 5$
$\therefore a = 2(\because a \geq 0)$ $\therefore g(5) = 2$
또, $g(0) = b$ 라 하면 $f^{-1}(0) = b$ 에서 $f(b) = 0$
그런데 $x < 0$ 일 때, $f(x) = x + 1 < 1$ 이므로
$f(b) = b + 1 = 0$
$\therefore b = -1$ $\therefore g(0) = -1$
$\therefore g(5) + g(0) = 2 - 1 = 1$

12. 분수식 $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\frac{x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}\cdots$ ①

①에서 분자를 x에 관하여 정리하면

$x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)$

$=(z-y)x^2-(z^2-y^2)x+yz^2-y^2z$

$=(z-y)x^2-(z+y)(z-y)x+zy(z-y)$

$=(z-y)\{x^2-(z+y)x+zy\}$

$=(z-y)(x-z)(x-y)=(x-y)(y-z)(z-x)$

$\therefore$ (준식) $=\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1$

13. $x^2-3x+1=0$ 일 때, $x-\frac{1}{x}$ 의 값을 구하면?(단, $0<x<1$)

① $-\sqrt{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $-\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ $-\sqrt{5}$

해설

$x^2-3x+1=0$ 에서 양변을 x로 나누면

$x-3+\frac{1}{x}=0,\ x+\frac{1}{x}=3$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=9-4=5$

$0<x<1,\ x-\frac{1}{x}=-\sqrt{5}$

14. 분수함수 $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$ 에 대하여 $f(x)+g(x)=1$을 만족하는 $g(x)$는?

① $x+2$ ② $x+1$ ③ $\dfrac{1}{x+2}$ ④ $\dfrac{1}{x+1}$ ⑤ $\dfrac{1}{x}$

해설

$f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$

$=\dfrac{1}{\dfrac{1+x+1}{1+x}}$

$=\dfrac{x+1}{x+2}$

$=1-\dfrac{1}{x+2}$

$\therefore g(x)=1-f(x)$

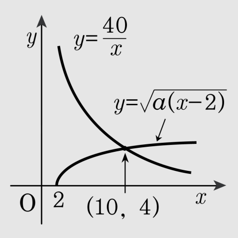
$=1-\left(1-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$=\dfrac{1}{x+2}$

15. 함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동 한 그래프와 곡선 $y = \dfrac{40}{x}(x > 0)$ 이 만나는 점의 x좌표가 10일 때, 상수 a의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설



함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를
x 축의 방향으로
2 만큼 평행이동시키면
$y = \sqrt{a(x-2)}$
이 그래프와 곡선 $y = \dfrac{40}{x}$ 이 만나는 점의
x좌표는 10이므로
y좌표는 $y = \dfrac{40}{10} = 4$
즉 교점의 좌표는 $(10, 4)$
이것을 $y = \sqrt{a(x-2)}$ 대입하면
$4 = \sqrt{a(10-2)} = \sqrt{8a}$
$\therefore a = 2$

16. 다음 함수 중 그 그래프가 제 1, 3, 4 사분면을 지나는 것은?

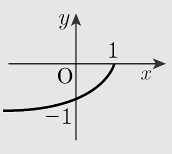
① $y=-\sqrt{1-x}$　　② $y=\sqrt{2x+4}-3$

③ $y=-\sqrt{2x+3}+3$　　④ $y=\sqrt{1-4x}+5$

⑤ $y=-\sqrt{6-2x}-1$

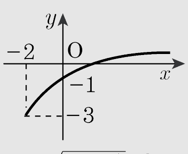
해설

① 제 3, 4 사분면을 지난다.



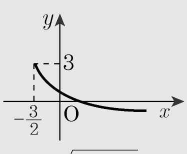
$y=-\sqrt{1-x}$

② 제 1, 3, 4 사분면을 지난다.



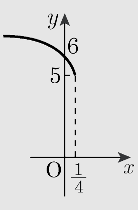
$y=\sqrt{2x+4}-3$

③ 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.



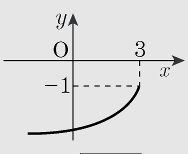
$y=-\sqrt{2x+3}+3$

④ 제 1, 2 사분면을 지난다.



$y=\sqrt{1-4x}+5$

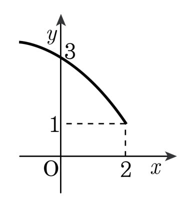
⑤ 제 3, 4 사분면을 지난다.



$y=-\sqrt{6-2x}-1$

따라서 그래프가 제 1, 3, 4 사분면을 지나는 것은 ②이다.

17. 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $a+b+c$의 값은?



① -1　　② 0　　③ 1

④ 2　　⑤ 3

해설

주어진 그림은 $y = \sqrt{ax}$의 그래프를
x축 방향으로 2, y축 방향으로 1만큼 평행이동한
것이므로 $y-1 = \sqrt{a(x-2)}$
즉 $y = \sqrt{a(x-2)}+1$
그런데 이 그래프가 점 $(0,3)$을 지나므로
$3 = \sqrt{-2a}+1$
$\sqrt{-2a} = 2,\ -2a = 4$
$\therefore a = -2$
$\therefore y = \sqrt{-2x+4}+1$
$\therefore a+b+c = (-2)+4+1 = 3$

18. $-4 \le x \le 1$ 에서 함수 $y = 1 - \sqrt{a - 3x}$ 의 최댓값이 0 일 때, 최솟값은? (단, a 는 상수이다.)

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

$y = 1 - \sqrt{a - 3x} = 1 - \sqrt{-3\left(x - \frac{a}{3}\right)}$

주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{a}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가한다.

$x = 1$ 일 때 최댓값을 가지므로

$0 = 1 - \sqrt{a - 3} \quad \therefore\ a = 4$

$x = -4$ 일 때 최솟값을 가지므로

$y = 1 - \sqrt{4 - 3 \cdot (-4)} = -3$

따라서 최솟값은 -3 이다.

19. $x \geq -1$ 인 실수 x에 대하여 $f(x) = \sqrt{x+1}$로 정의된 함수 f의 역함수를 f^{-1}이라고 할 때 모든 양수 t에 대하여 $\dfrac{f^{-1}(t)}{(t+1)^2}$를 옳게 나타낸 것은?

① $\dfrac{1}{t+1}$ ② $\dfrac{t}{t+1}$ ③ $\dfrac{2t-2}{t+1}$
④ $\dfrac{t-1}{t+1}$ ⑤ $\dfrac{2t}{t-1}$

해설

$f(x) = \sqrt{x+1}$ $(x \geq -1)$에서
역함수 $f^{-1}(x)$를 구하여 $f^{-1}(t)$로 나타내면
$y = \sqrt{x+1} \rightarrow y^2 = x+1 \rightarrow x = y^2 - 1$
$\therefore f^{-1}(x) = x^2 - 1$ $(x \geq 0)$
$\therefore f^{-1}(t) = t^2 - 1$
$\therefore \dfrac{f^{-1}(t)}{(t+1)^2} = \dfrac{t^2-1}{(t+1)^2} = \dfrac{t-1}{t+1}$

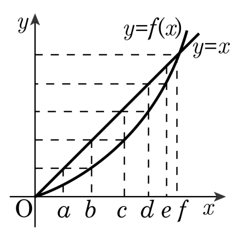
20. 두 집합 $X = \{x \mid 1 \le x \le 5\}$, $Y = \{y \mid 1 \le y \le 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = ax + b$ 의 역함수가 존재할 때, 상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, $a > 0$)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

역함수가 존재하므로 함수 f 는 일대일대응이다.
함수 $f(x)$ 의 기울기가 양수이므로
$f(1) = 1,\ f(5) = 3$
$f(1) = 1$ 에서 $a + b = 1 \cdots$ ㉠
$f(5) = 3$ 에서 $5a + b = 3 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2}$
$\therefore a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

21. 다음 그림에서 곡선은 함수 $y = f(x)$의 그래프이고 직선은 $y = x$의 그래프이다. $(f \circ f)(d) + (g \circ g)(c)$를 구하면? (단, $g(x) = f^{-1}(x)$이다.)



① $2a$　② $b + e$　③ $c + d$

④ $2c$　⑤ $b + c$

해설

$(f \circ f)(d) = b,\ (g \circ g)(c) = e$

f와 g는 역함수 관계. 즉 $y = x$에 대칭이다.

22. 분수함수 $y = \dfrac{x-4}{x-3}$ 의 정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$ 일 때, 다음 중 치역을 바르게 구한 것은?

① $\left\{y \mid -\dfrac{4}{3} < y < 1\right\}$

② $\left\{y \mid \dfrac{4}{3} \leq y < -1\right\}$

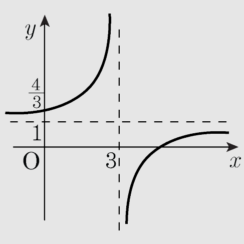
③ $-1 \leq y < \dfrac{4}{3}$ 을 제외한 실수 전체

④ $1 \leq y < \dfrac{4}{3}$ 을 제외한 실수 전체

⑤ $-\dfrac{4}{3} \leq y \leq 1$ 을 제외한 실수 전체

해설

$y = \dfrac{x-4}{x-3} = \dfrac{x-3-1}{x-3} = 1 + \dfrac{-1}{x-3}$



$x = 0$ 일 때, $y = \dfrac{-4}{-3} = \dfrac{4}{3}$ 이므로,

치역은 $1 \leq y < \dfrac{4}{3}$ 을 제외한 실수 전체

23. $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 일 때, $\dfrac{x}{x+\sqrt{x-1}} + \dfrac{x}{x-\sqrt{x-1}}$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{\sqrt{3}-2}{2}$ ② $\dfrac{2-\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}$
④ $\dfrac{2+3\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$

해설

$\dfrac{x}{x+\sqrt{x-1}} + \dfrac{x}{x-\sqrt{x-1}}$

$= \dfrac{\left\{(x-\sqrt{x-1})+(x+\sqrt{x-1})\right\}x}{(x+\sqrt{x-1})(x-\sqrt{x-1})}$

$= \dfrac{2x^2}{x^2-x+1}$

$x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 에서 $2x-1=\sqrt{5}$

양변을 제곱하면 $4x^2-4x+1=5$

$\therefore\ x^2 = x+1$

$\therefore$ (준식) $= \dfrac{2x^2}{x^2-x+1}$

$= \dfrac{2(x+1)}{(x+1)-x+1} = x+1$

$= \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}+1 = \dfrac{\sqrt{5}+3}{2}$

24. $x = \sqrt{\sqrt{49} - \sqrt{48}}$ 일 때, $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 1$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\sqrt{49} - \sqrt{48}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{12}} \\ &= \sqrt{(4+3) - 2\sqrt{4 \times 3}} \\ &= \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

$x = 2 - \sqrt{3}$ 에서 $(x-2)^2 = (-\sqrt{3})^2$

$x^2 - 4x + 4 = 3$

$\therefore\ x^2 - 4x + 1 = 0$

$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 1$

$= x^2(x^2 - 4x + 1) + x^3 - 4x^2 + x + 1$

$= x^3 - 4x^2 + x + 1 = x(x^2 - 4x + 1) + 1 = 1$

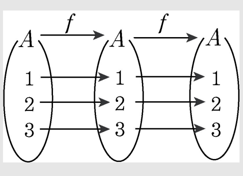
25. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 집합 A 에서 A 로의 함수 중 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

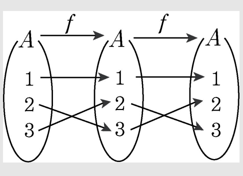
▷ 정답 : 4개

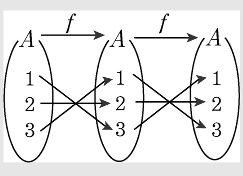
해설

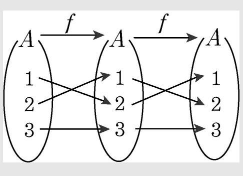
i) $f(x) = x$ 인 경우 1개



ii) 1개의 원소는 자기 자신에 대응되고, 나머지 2개의 원소는 서로 엇갈려 대응되면 된다.
자기 자신에 대응되는 원소가 1, 2, 3인 3가지 경우가 있다.







i), ii) 에서 구하는 함수 f 의 개수는 $1 + 3 = 4$(개)