

1. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8 개

해설

1이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
2가 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
3이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
따라서 X 에서 Y 로의 함수의 개수는
 $2 \times 2 \times 2 = 8(\text{개})$

2. 함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f^{-1}(1) = 2$, $f(1) = 2$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f(2) = 2a + b = 1, \quad f(1) = a + b = 2$$

$$\text{연립하면 } a = -1, \quad b = 3$$

$$\therefore f(3) = 3a + b = 0$$

3. $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 4} \times \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4x + 3} \div \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + 3x - 4}$ 을 간단히 하면 ?

① $\frac{4}{x-3}$

② $\frac{1}{x+4}$

③ $\frac{2}{x+2}$

④ 1

⑤ 0

해설

(주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+4)} \times \frac{(x+1)(2x+1)}{(x-1)(x-3)} \\
 &\quad \div \frac{(x-2)(2x+1)}{(x-1)(x+4)} \\
 &= \frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+4)} \times \frac{(x+1)(2x+1)}{(x-1)(x-3)} \\
 &\quad \times \frac{(x-1)(x+4)}{(x-2)(2x+1)} = 1
 \end{aligned}$$

4. 함수 $y = \frac{ax+1}{x-1}$ 의 역함수가 그 자신이 되도록 a 의 값을 정하면?

① -1

② 1

③ -2

④ 2

⑤ 0

해설

$$y = \frac{ax+1}{x-1} \text{ 에서 } y(x-1) = ax+1$$

$$yx - y = ax + 1, yx - ax = 1 + y$$

$$x(y-a) = 1+y, x = \frac{1+y}{y-a}$$

$$\therefore y^{-1} = \frac{x+1}{x-a}$$

역함수가 본래 함수와 같으므로

$$\frac{x+1}{x-a} = \frac{ax+1}{x-1}$$

$$\therefore a = 1$$

5. 다음 무리식의 값이 실수가 되는 실수 x 의 값의 범위는?

$$\sqrt{3x^2 + 13x + 4}$$

① $x \leq -4$ 또는 $x \geq -\frac{1}{3}$

② $x \leq -\frac{1}{3}$ 또는 $x \geq 4$

③ $x \leq \frac{1}{3}$ 또는 $x \geq 4$

④ $-4 \leq x \leq \frac{1}{3}$

⑤ $-\frac{1}{3} \leq x \leq 4$

해설

$$3x^2 + 13x + 4 \geq 0$$

$$(3x + 1)(x + 4) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -4 \text{ 또는 } x \geq -\frac{1}{3}$$

6. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 일 때, 다음 식의 값은?

$$\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

① $3(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

② $3(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

③ 9

④ $5(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

⑤ $7(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

해설

$$\begin{aligned} \text{(주어진 식)} &= \frac{\frac{x^3 + y^3}{(xy)^3}}{\frac{x + y}{xy}} \\ &= \frac{(x + y)^3 - 3xy(x + y)}{(x + y)(xy)^2} \\ &= \frac{(x + y)^2 - 3xy}{(xy)^2} \end{aligned}$$

조건에서 $x + y = 2\sqrt{3}$, $xy = 1$

$$\therefore \text{(주어진 식)} = \frac{(2\sqrt{3})^2 - 3 \cdot 1^2}{1} = 9$$

7. 다음 중 정의역이 $\{0, 1, 2\}$ 인 함수 f 의 그래프가 될 수 있는 것은?

① $\{(0, 1), (1, 2)\}$

② $\{(0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$

③ $\{(1, 2), (1, 0), (2, 2)\}$

④ $\{(0, 1), (0, 2), (2, 0)\}$

⑤ $\{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

해설

$f(0) = a, f(1) = b, f(2) = c$ 라 하면,
함수 f 의 그래프는
 $(0, a), (1, b), (2, c)$ 의 꼴이어야 한다.

8. $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{y | y \text{는 정수}\}$ 일 때, 함수 $f : X \rightarrow Y$ 가 $f(x) = (x^2 \text{을 } 5 \text{로 나눈 나머지})$ 로 정의할 때, 함수 f 의 치역에 있는 모든 원소의 합은 얼마인가?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$f(x) = (x^2 \text{을 } 5 \text{로 나눈 나머지})$ 이므로

$$f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 4, f(4) = 1, f(5) = 0$$

$$\therefore \{f(x) \mid x \in X\} = \{0, 1, 4\}$$

따라서 모든 원소의 합은 $0 + 1 + 4 = 5$

9. 두 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 A 에서 B 로의 함수 f 가 $x \in A$ 인 모든 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시킬 때, 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

집합 A 에서 B 로의 함수 f 가

$f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키려면

-1 이 대응할 수 있는 원소는

-2, -1, 0, 1, 2 의 5 가지.

0 이 대응할 수 있는 원소는

$f(-0) = -f(0)$ 에서, $2f(0) = 0$,

즉 0 의 1 가지

1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(-1)$ 의 1 가지

따라서, 함수 f 의 개수는 $5 \times 1 \times 1 = 5$ (개)

10. $f(x) = 2x - 3$ 일 때, $f(f(x)) = f(f(f(x)))$ 를 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(f(x)) = 4x - 9$, $f(f(f(x))) = 8x - 21$ 이므로

$$4x - 9 = 8x - 21$$

$$\therefore x = 3$$

11. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \geq 0) \\ x + 1 & (x < 0) \end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(5) + g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$g(5) = a$ 라 하면 $f^{-1}(5) = a$ 에서 $f(a) = 5$
그런데 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) = x^2 + 1 \geq 1$ 이므로
 $f(a) = a^2 + 1 = 5$
 $\therefore a = 2 (\because a \geq 0) \therefore g(5) = 2$
또, $g(0) = b$ 라 하면 $f^{-1}(0) = b$ 에서 $f(b) = 0$
그런데 $x < 0$ 일 때, $f(x) = x + 1 < 1$ 이므로
 $f(b) = b + 1 = 0$
 $\therefore b = -1 \therefore g(0) = -1$
 $\therefore g(5) + g(0) = 2 - 1 = 1$

12. 분수식 $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \dots \textcircled{1}$$

①에서 분자를 x 에 관하여 정리하면

$$\begin{aligned} & x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x) \\ &= (z-y)x^2 - (z^2 - y^2)x + yz^2 - y^2z \\ &= (z-y)x^2 - (z+y)(z-y)x + zy(z-y) \\ &= (z-y) \{x^2 - (z+y)x + zy\} \\ &= (z-y)(x-z)(x-y) = (x-y)(y-z)(z-x) \end{aligned}$$

$$\therefore (\text{준식}) = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 1$$

13. $x^2 - 3x + 1 = 0$ 일 때, $x - \frac{1}{x}$ 의 값을 구하면?(단, $0 < x < 1$)

① $-\sqrt{2}$

② $\sqrt{2}$

③ $-\sqrt{3}$

④ $\sqrt{3}$

⑤ $-\sqrt{5}$

해설

$x^2 - 3x + 1 = 0$ 에서 양변을 x 로 나누면

$$x - 3 + \frac{1}{x} = 0, x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$$

$$0 < x < 1, x - \frac{1}{x} = -\sqrt{5}$$

14. 분수함수 $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}$ 에 대하여 $f(x) + g(x) = 1$ 을 만족하는

$g(x)$ 는?

- ① $x+2$ ② $x+1$ ③ $\frac{1}{x+2}$ ④ $\frac{1}{x+1}$ ⑤ $\frac{1}{x}$

해설

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1+x+1}{1+x}}$$

$$= \frac{x+1}{x+2}$$

$$= 1 - \frac{1}{x+2}$$

$$\therefore g(x) = 1 - f(x)$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{x+2}\right)$$

$$= \frac{1}{x+2}$$

15. 함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동 한 그래프와 곡선 $y = \frac{40}{x} (x > 0)$ 이 만나는 점의 x 좌표가 10일 때, 상수 a 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를

x 축의 방향으로

2만큼 평행이동시키면

$$y = \sqrt{a(x-2)}$$

이 그래프와 곡선 $y = \frac{40}{x}$ 이 만나는 점의

x 좌표는 10이므로

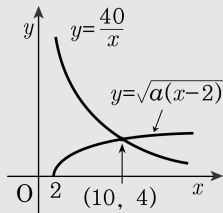
$$y\text{좌표는 } y = \frac{40}{10} = 4$$

즉 교점의 좌표는 (10, 4)

이것을 $y = \sqrt{a(x-2)}$ 대입하면

$$4 = \sqrt{a(10-2)} = \sqrt{8a}$$

$$\therefore a = 2$$



16. 다음 함수 중 그 그래프가 제 1, 3, 4 사분면을 지나는 것은?

① $y = -\sqrt{1-x}$

② $y = \sqrt{2x+4} - 3$

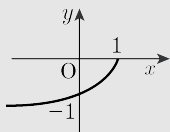
③ $y = -\sqrt{2x+3} + 3$

④ $y = \sqrt{1-4x} + 5$

⑤ $y = -\sqrt{6-2x} - 1$

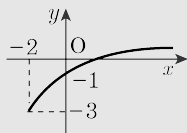
해설

① 제 3, 4 사분면을 지난다.



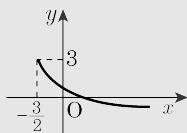
$y = -\sqrt{1-x}$

② 제 1, 3, 4 사분면을 지난다.



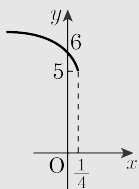
$y = \sqrt{2x+4} - 3$

③ 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.



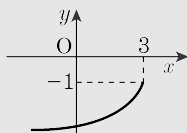
$y = -\sqrt{2x+3} + 3$

④ 제 1, 2 사분면을 지난다.



$y = \sqrt{1-4x} + 5$

⑤ 제 3, 4 사분면을 지난다.



$y = -\sqrt{6-2x} - 1$

따라서 그래프가 제 1, 3, 4 사분면을 지나는 것은 ②이다.

17. 무리함수 $y = \sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $a+b+c$ 의 값은?

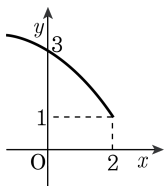
① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3



해설

주어진 그림은 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를

x 축 방향으로 2, y 축 방향으로 1만큼 평행이동한

것이므로 $y - 1 = \sqrt{a(x - 2)}$

$$\text{즉 } y = \sqrt{a(x - 2)} + 1$$

그런데 이 그래프가 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$3 = \sqrt{-2a} + 1$$

$$\sqrt{-2a} = 2, -2a = 4$$

$$\therefore a = -2$$

$$\therefore y = \sqrt{-2x + 4} + 1$$

$$\therefore a + b + c = (-2) + 4 + 1 = 3$$

18. $-4 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $y = 1 - \sqrt{a - 3x}$ 의 최댓값이 0 일 때, 최솟값은?
(단, a 는 상수이다.)

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

$$y = 1 - \sqrt{a - 3x} = 1 - \sqrt{-3 \left(x - \frac{a}{3} \right)}$$

주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{a}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가한다.

$x = 1$ 일 때 최댓값을 가지므로

$$0 = 1 - \sqrt{a - 3} \quad \therefore a = 4$$

$x = -4$ 일 때 최솟값을 가지므로

$$y = 1 - \sqrt{4 - 3 \cdot (-4)} = -3$$

따라서 최솟값은 -3 이다.

19. $x \geq -1$ 인 실수 x 에 대하여 $f(x) = \sqrt{x+1}$ 로 정의된 함수 f 의 역함수를 f^{-1} 이라고 할 때 모든 양수 t 에 대하여 $\frac{f^{-1}(t)}{(t+1)^2}$ 를 옳게 나타낸 것은?

① $\frac{1}{t+1}$
④ $\frac{t-1}{t+1}$

② $\frac{t}{t+1}$
⑤ $\frac{2t}{t-1}$

③ $\frac{2t-2}{t+1}$

해설

$f(x) = \sqrt{x+1}$ ($x \geq -1$)에서

역함수 $f^{-1}(x)$ 를 구하여 $f^{-1}(t)$ 로 나타내면

$$y = \sqrt{x+1} \rightarrow y^2 = x+1 \rightarrow x = y^2 - 1$$

$$\therefore f^{-1}(x) = x^2 - 1 \quad (x \geq 0)$$

$$\therefore f^{-1}(t) = t^2 - 1$$

$$\therefore \frac{f^{-1}(t)}{(t+1)^2} = \frac{t^2 - 1}{(t+1)^2} = \frac{t-1}{t+1}$$

20. 두 집합 $X = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$, $Y = \{y \mid 1 \leq y \leq 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = ax + b$ 의 역함수가 존재할 때, 상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, $a > 0$)

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ 1

⑤ 2

해설

역함수가 존재하므로 함수 f 는 일대일대응이다.

함수 $f(x)$ 의 기울기가 양수이므로

$$f(1) = 1, f(5) = 3$$

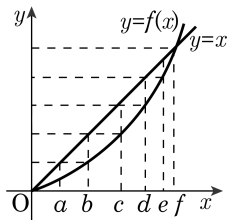
$$f(1) = 1 \text{ 에서 } a + b = 1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(5) = 3 \text{ 에서 } 5a + b = 3 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{ 을 연립하여 풀면 } a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

21. 다음 그림에서 곡선은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프이고 직선은 $y = x$ 의 그래프이다. $(f \circ f)(d) + (g \circ g)(c)$ 를 구하면? (단, $g(x) = f^{-1}(x)$ 이다.)



① $2a$

② $b + e$

③ $c + d$

④ $2c$

⑤ $b + c$

해설

$$(f \circ f)(d) = b, (g \circ g)(c) = e$$

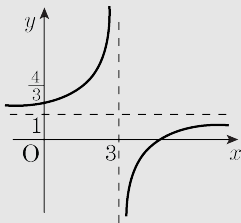
f 와 g 는 역함수 관계. 즉 $y = x$ 에 대칭이다.

22. 분수함수 $y = \frac{x-4}{x-3}$ 의 정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$ 일 때, 다음 중 치역을
바르게 구한 것은?

- ① $\left\{y \mid -\frac{4}{3} < y < 1\right\}$
 ② $\left\{y \mid \frac{4}{3} \leq y < -1\right\}$
 ③ $-1 \leq y < \frac{4}{3}$ 을 제외한 실수 전체
 ④ $1 \leq y < \frac{4}{3}$ 을 제외한 실수 전체
 ⑤ $-\frac{4}{3} \leq y \leq 1$ 을 제외한 실수 전체

해설

$$y = \frac{x-4}{x-3} = \frac{x-3-1}{x-3} = 1 + \frac{-1}{x-3}$$



$x=0$ 일 때, $y = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$ 이므로,

치역은 $1 \leq y < \frac{4}{3}$ 을 제외한 실수 전체

23. $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 일 때, $\frac{x}{x+\sqrt{x-1}} + \frac{x}{x-\sqrt{x-1}}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$

② $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$

③ $\frac{\sqrt{5}+3}{2}$

④ $\frac{2+3\sqrt{3}}{3}$

⑤ $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{x}{x+\sqrt{x-1}} + \frac{x}{x-\sqrt{x-1}} \\ &= \frac{\{(x-\sqrt{x-1}) + (x+\sqrt{x-1})\}x}{(x+\sqrt{x-1})(x-\sqrt{x-1})} \\ &= \frac{2x^2}{x^2-x+1} \end{aligned}$$

$$x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ 에서 } 2x-1 = \sqrt{5}$$

양변을 제곱하면 $4x^2 - 4x + 1 = 5$

$$\therefore x^2 = x + 1$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준식}) &= \frac{2x^2}{x^2-x+1} \\ &= \frac{2(x+1)}{(x+1)-x+1} = x+1 \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{5}+3}{2} \end{aligned}$$

24. $x = \sqrt{\sqrt{49} - \sqrt{48}}$ 일 때, $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 1$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{\sqrt{49} - \sqrt{48}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{12}} \\&= \sqrt{(4 + 3) - 2\sqrt{4 \times 3}} \\&= \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$x = 2 - \sqrt{3} \text{ 에서 } (x - 2)^2 = (-\sqrt{3})^2$$

$$x^2 - 4x + 4 = 3$$

$$\therefore x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 1$$

$$= x^2(x^2 - 4x + 1) + x^3 - 4x^2 + x + 1$$

$$= x^3 - 4x^2 + x + 1 = x(x^2 - 4x + 1) + 1 = 1$$

25. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 집합 A 에서 A 로의 함수 중 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수 f 의 개수를 구하여라.

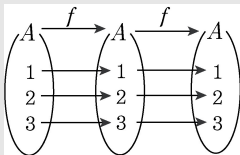
▶ 답 :

개

▶ 정답 : 4개

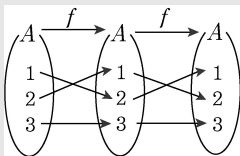
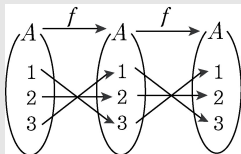
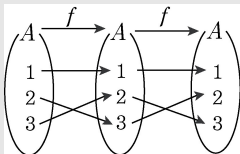
해설

i) $f(x) = x$ 인 경우 1개



ii) 1개의 원소는 자기 자신에 대응되고, 나머지 2개의 원소는 서로 엇갈려 대응되면 된다.

자기 자신에 대응되는 원소가 1, 2, 3인 3가지 경우가 있다.



i), ii)에서 구하는 함수 f 의 개수는 $1 + 3 = 4(\text{개})$