

1. 점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 점 $(0, -3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이가 5 일 때, 양수 a 의 값은?

① 2

② $2\sqrt{2}$

③ 3

④ $2\sqrt{3}$

⑤ 4

해설

점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5 인
원의 방정식은 $\therefore (x - a)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$
이 점 $(0, -3)$ 을 지나므로 $(0 - a)^2 + (-3 - 1)^2 = 25$
 $a^2 = 9 \quad \therefore a = 3, (\because a > 0)$

2. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 3k^2 - 4k + 2 = 0$ 이
반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식을 변형하면

$$(x - k)^2 + (y + k)^2 = -k^2 + 4k - 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

반지름의 길이가 1 이므로

$$\textcircled{1} \text{에서 } -k^2 + 4k - 2 = 1 \leftarrow r^2 = 1$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0, (k - 1)(k - 3) = 0$$

$$\therefore k = 1 \text{ 또는 } k = 3$$

따라서 합은 4이다.

3. 두 점 A(-5, 1), B(3, 7) 을 지름의 양끝으로 하는 원의 중심을 (a, b) , 반지름의 길이를 r 이라 할 때, $a + b + r$ 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

A(-5, 1) B(3, 7) 이 지름의 양끝이므로
 $\overline{AB}$ 의 중점은 중심의 좌표와 같다.
중점
 $M = \left(\frac{-5+3}{2}, \frac{1+7}{2} \right) = (-1, 4) = (a, b)$
반지름
 $r = \sqrt{(-5+1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{25} = 5$
 $\therefore a + b + r = -1 + 4 + 5 = 8$

4. 세 점 $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$ 을 지나는 원의 방정식이 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ (단, $r > 0$) 라고 할 때, $a + b + r$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

구하는 원의 방정식을
 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 으로 놓는다.
세 점 $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$ 은
 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
위의 점이므로 등식이 성립한다.
따라서 세 점을 대입한 식을 연립시키면
구하는 원의 방정식은 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 이다.
 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 을 정리하면
 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 이다.
따라서 $a = 1$, $b = 0$, $r = 1$ 이므로
 $a + b + r = 2$ 이다.

5. 방정식 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + c = 0$ 의 그래프가 원이 되도록 상수 c 의 값의 범위를 정하면?

① $c < 1$ ② $c < 2$ ③ $c < 3$ ④ $c < 4$ ⑤ $c < 5$

해설

주어진 방정식을 변형하면

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = 5 - c$$

$$\therefore (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 - c \quad \leftarrow \quad 5 - c = r^2$$

이 방정식의 그래프가 원이 되려면

$$5 - c > 0 \quad \leftarrow \quad r^2 > 0$$

$$\therefore c < 5$$

6. 중심이 (2, 3) 이고 y 축에 접하는 원의 방정식은?

- ① $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ ② $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$
③ $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 4$ ④ $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 9$
⑤ $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 5$

해설

중심이 (2,3) 일 때 y 축에 접해야 하므로
반지름의 길이는 2 이다.

7. 두 원 $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 8 = 0$, $x^2 + y^2 - 4y = 0$ 의 공통현의 방정식은?

① $x - 5y + 4 = 0$

② $4x - 3y + 4 = 0$

③ $3x - 3y + 4 = 0$

④ $x - y + 4 = 0$

⑤ $2x - y + 1 = 0$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 8 - (x^2 + y^2 - 4y) = 0$$

$$2x - 2y + 8 = 0$$

$$\therefore x - y + 4 = 0$$

8. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

9. 직선 $2x + y + 5 = 0$ 을 x 축의 방향으로 3만큼 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 도형의 방정식은?

- ㉠ $2x + y + 1 = 0$ ㉡ $2x - y + 1 = 0$ ㉢ $2x + y - 1 = 0$
㉣ $2x + y + 3 = 0$ ㉤ $2x + y - 2 = 0$

해설

x 축의 방향으로 3만큼 y 축의 방향으로 -2 만큼

평행이동하므로 주어진 방정식은

$2(x - 3) + (y + 2) + 5 = 0$ 으로 이동된다.

따라서, $2x + y + 1 = 0$

10. 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가
반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$$

$\therefore n > 4$ ($\because n$ 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 n 은 5이다.

11. $x^2 + y^2 = 1$ 일 때, $2x + y$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

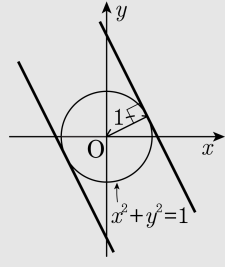
▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 $\sqrt{5}$

▷ 정답 : 최솟값 $-\sqrt{5}$

해설



구하는 $2x + y = k$ 라 하면 $y = -2x + k$ 에서 k 는 기울기가 -2 인 직선의 y 절편이다.

주어진 조건을 만족할 때, 직선은 다음 그림과 같이 존재하므로

점과 직선사이의 거리에서 $\frac{|k|}{\sqrt{5}} \leq 1$

$\therefore -5 \leq k \leq \sqrt{5}$

12. 직선 $y = x + 4$ 가 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

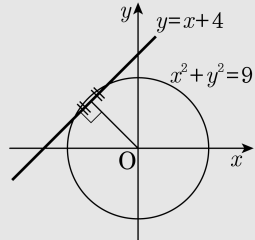
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x - y + 4 = 0$

이므로 $\frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분하므로 피타고라스 정리에서 ,

현의 길이는 $2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2$

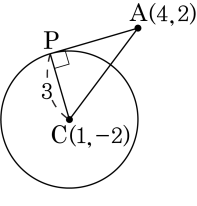
13. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 이 주어졌을 때, 점 A(4, 2) 에서 그은 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면
 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ 이다.
다음 그림에서 접선의 길이는
 $\overline{AP} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2}$
한편, $\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이고 $\overline{CP} = 3$
 $\therefore \overline{AP} = 4$



14. $x^2 + y^2 = 5$ 에 접하고, 기울기가 -2 이며, 제 1, 2, 4사분면을 지나는 접선의 방정식을 구하면?

① $y = -2x - \sqrt{5}$

② $y = -2x + 5\sqrt{5}$

③ $y = -2x - 3\sqrt{5}$

④ $y = -2x + 3\sqrt{5}$

⑤ $y = -2x - 5\sqrt{5}$

해설

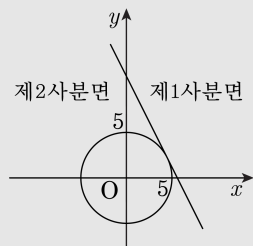
기울기가 -2 인 직선의 방정식을 $y = -2x + c$ 라 하고, 직선과 원점간의 거리가 원의 반지름인

5와 같으므로 $\frac{|-c|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 5$

$\therefore c = \pm 5\sqrt{5}$

다음 그림과 같이 제 1, 2, 4사분면을 지나야 하므로 $\therefore c = 5\sqrt{5}$

$\therefore y = -2x + 5\sqrt{5}$



15. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 두 개의 접선의 기울기를 합하면?

① $\frac{3}{2}$

② $\frac{5}{2}$

③ 0

④ $-\frac{3}{2}$

⑤ $-\frac{5}{2}$

해설

$(3, -1)$ 을 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면

$$y = m(x - 3) - 1 = mx - 3m - 1$$

원 중심에서 접선까지 거리는 반지름과 같으므로

$$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

$$(-3m - 1)^2 = 5m^2 + 5$$

$$4m^2 + 6m - 4 = 0$$

$$2m^2 + 3m - 2 = 0$$

$$m = -2, \frac{1}{2}$$

16. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 위의 점 P에 대하여 선분 OP의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$$

OP의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 OP $\sqrt{4^2 + 3^2} + 2 = 7$

17. 좌표평면 위의 두 점 A(8, 0), B(0, 6)에 대하여 삼각형 OAB의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle AOB = 90^\circ$ 이므로 선분 AB는 외접원의 지름이다.
 $\overline{AB} = 10$ 이고 원의 중심은 $C(4, 3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$
이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$
 $a = -8, b = -6, c = 0$
 $\therefore abc = 0$

18. $y = x^2 - 2$ 위의 점 P에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접선을 그을 때, 그 접점을 Q라고 하자. 선분 PQ의 길이의 최솟값은 ?

- ① 1 ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

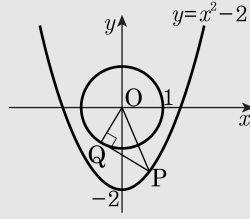
해설

P($x, x^2 - 2$), O(0,0) 라고 하면 $\triangle OPQ$ 는 직각삼각형이다.

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= \overline{OP}^2 - \overline{OQ}^2 \\ &= x^2 + (x^2 - 2)^2 - 1 \\ &= x^4 - 3x^2 + 3 \\ &= \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

$\overline{PQ}^2$ 의 최솟값은 $x^2 = \frac{3}{2}$ 일 때, $\frac{3}{4}$ 이다.

따라서, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.



19. 원 $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 1 = 0$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시킨 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하면?

- ① $(-1, -1)$, $2\sqrt{3}$ ② $(0, 0)$, $3\sqrt{3}$ ③ $(1, 1)$, $4\sqrt{3}$
④ $(2, 2)$, $5\sqrt{3}$ ⑤ $(3, 3)$, $6\sqrt{3}$

해설

$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 1 = 0$
 $(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = 12$
 $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 12$
이 원의 중심의 좌표는 $(-3, 2)$ 이고
반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$ 이다.
따라서, 이 원을 x 축의 방향으로 2 만큼,
 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시켰을 때,
중심의 좌표는 $(-3 + 2, 2 - 3) = (-1, -1)$ 이고,
반지름의 길이는 변하지 않으므로 $2\sqrt{3}$ 이다.

20. 좌표평면 위의 두 점 A(-1, 0), B(1, 0) 으로부터의 거리의 비가 2 : 1 이 되도록 움직이는 점 P 가 있다. 이때, ΔPAB 의 넓이가 자연수가 되는 점의 개수는?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

점 P 의 좌표를 P(x,y) 라 하면

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로

$\overline{AP} = 2\overline{BP}$

$\therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$

$(x+1)^2 + y^2 = 4\{(x-1)^2 + y^2\}$

$3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0$

$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$

이때, ΔPAB 의 넓이는 밑변 AB 가 고정되어 있으므로 높이에 따라 변하게 된다.

즉, 높이가 반지름의 길이와 같을 때, 넓이가 최대이며 ΔPAB 의 넓이의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ 이므로,

넓이가 자연수 1 이 되는 점은 4 개다.

21. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 P에서의 접선이 점 (3, 1)을 지날 때, 점 P의 좌표를 (a, b) , (c, d) 라 할 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

접점을 (x_1, y_1) 이라 하면 접선은

$$x_1x + y_1y = 5 \cdots \textcircled{1}$$

이것이 점 (3, 1)을 지나므로

$$3x_1 + y_1 = 5 \cdots \textcircled{2}$$

또, (x_1, y_1) 은 $x^2 + y^2 = 5$

$$\text{위의 점이므로 } x_1^2 + y_1^2 = 5 \cdots \textcircled{3}$$

②에서 $y_1 = 5 - 3x_1$ 을 ③에 대입하면

$$x_1^2 + (5 - 3x_1)^2 - 5 = 0,$$

$$10x_1^2 - 30x_1 + 20 = 0$$

$$10(x_1 - 1)(x_1 - 2) = 0$$

$$\therefore x_1 = 1 \text{ 이면 } y_1 = 2, x_1 = 2 \text{ 이면 } y_1 = -1$$

$$\therefore \text{접점은 } (1, 2), (2, -1)$$

22. 한 점 $A(-2, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 에 이르는 거리의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할때, $M + m$ 의 값은?

- ① $2\sqrt{31}$
- ② $4\sqrt{2} + 2\sqrt{31}$
- ③ $2\sqrt{34}$
- ④ $4\sqrt{2} + 2\sqrt{34}$
- ⑤ $8\sqrt{2}$

해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 - 8 = 0$$

에서

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

그림에서 점과 원 사이의 거리의 최댓값은
(점과 원의 중심 사이의 거리)+(반지름)
즉 $\sqrt{(-2 - 1)^2 + (3 + 2)^2} + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{34}$
최솟값은 (점과 원의 중심 사이의 거리)-반지름
= $\sqrt{34} - 2\sqrt{2}$
 $\therefore M + m = 2\sqrt{34}$

23. 두 점 A(1, 0), B(4, 0)으로부터의 거리의 비가 2 : 1 인 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

주어진 조건에서 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로

$\overline{AP} = 2\overline{BP}$

$\therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓으면

$(x-1)^2 + y^2 = 4\{(x-4)^2 + y^2\}$

$\therefore (x-5)^2 + y^2 = 4$

따라서 점 P는 중심이 (5, 0)이고 반지름의 길이가 2인 원 위를 움직인다.

그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의

발을

H라 하면 $\overline{PH}$ 의 길이가

반지름의 길이와 같을 때 삼각형 PAB

의 넓이가

최대가 되므로 $\Delta PAB = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{PH} \leq$

$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은 3이다.

