1. 점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 점 $(0, -3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이가 5 일 때, 양수 a 의 값은?

① 2　　② $2\sqrt{2}$　　③ 3　　④ $2\sqrt{3}$　　⑤ 4

해설

점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5 인
원의 방정식은 $\therefore (x-a)^2 + (y-1)^2 = 5^2$
이 점$(0, -3)$ 을 지나므로 $(0-a)^2 + (-3-1)^2 = 25$
$a^2 = 9 \quad \therefore a = 3, (\because a > 0)$

2. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 3k^2 - 4k + 2 = 0$ 이 반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식을 변형하면
$(x-k)^2 + (y+k)^2 = -k^2 + 4k - 2 \quad \cdots ㉠$
반지름의 길이가 1 이므로
㉠에서 $-k^2 + 4k - 2 = 1 \leftarrow r^2 = 1$
$k^2 - 4k + 3 = 0, (k-1)(k-3) = 0$
$\therefore k = 1$ 또는 $k = 3$
따라서 합은 4이다.

3. 두 점 $A(-5,\ 1)$, $B(3,\ 7)$ 을 지름의 양끝으로 하는 원의 중심을 $(a,\ b)$, 반지름의 길이를 r 이라 할 때, $a+b+r$ 의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$A(-5,\ 1)$ $B(3,\ 7)$ 이 지름의 양끝이므로
$\overline{AB}$ 의 중점은 중심의 좌표와 같다.
중점

$$M = \left(\frac{-5+3}{2},\ \frac{1+7}{2}\right) = (-1,\ 4) = (a,\ b)$$

반지름

$$r = \sqrt{(-5+1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$\therefore\ a+b+r = -1+4+5 = 8$

4. 세 점 $(0,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(1,\ 1)$을 지나는 원의 방정식이 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ (단, $r>0$)라고 할 때, $a+b+r$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

구하는 원의 방정식을
$x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 으로 놓는다.
세 점 $(0,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(1,\ 1)$은
$x^2+y^2+Ax+By+C=0$
위의 점이므로 등식이 성립한다.
따라서 세 점을 대입한 식을 연립시키면
구하는 원의 방정식은 $x^2+y^2-2x=0$ 이다.
$x^2+y^2-2x=0$ 을 정리하면
$(x-1)^2+y^2=1$ 이다.
따라서 $a=1,\ b=0,\ r=1$ 이므로
$a+b+r=2$ 이다.

5. 방정식 $x^2+y^2-4x+2y+c=0$ 의 그래프가 원이 되도록 상수 c 의 값의 범위를 정하면?

① $c<1$ ② $c<2$ ③ $c<3$ ④ $c<4$ ⑤ $c<5$

해설

주어진 방정식을 변형하면

$\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2+2y+1\right)=5-c$

$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=5-c \quad \leftarrow \quad 5-c=r^2$

이 방정식의 그래프가 원이 되려면

$5-c>0 \quad \leftarrow \quad r^2>0$

$\therefore c<5$

6. 중심이 (2, 3) 이고 y 축에 접하는 원의 방정식은?

① $(x-2)^2+(y-3)^2=4$

② $(x-2)^2+(y-3)^2=9$

③ $(x+2)^2+(y+3)^2=4$

④ $(x+2)^2+(y+3)^2=9$

⑤ $(x-4)^2+(y-4)^2=5$

해설

중심이 $(2,3)$ 일 때 y 축에 접해야 하므로
반지름의 길이는 2 이다.

7. 두 원 $x^2+y^2+2x-6y+8=0$, $x^2+y^2-4y=0$ 의 공통현의 방정식은?

① $x-5y+4=0$

② $4x-3y+4=0$

③ $3x-3y+4=0$

④ $x-y+4=0$

⑤ $2x-y+1=0$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2+2x-6y+8-(x^2+y^2-4y)=0$

$2x-2y+8=0$

$\therefore x-y+4=0$

8. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

9. 직선 $2x+y+5=0$을 x축의 방향으로 3만큼 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 도형의 방정식은?

① $2x+y+1=0$ ② $2x-y+1=0$ ③ $2x+y-1=0$

④ $2x+y+3=0$ ⑤ $2x+y-2=0$

해설

x축의 방향으로 3만큼 y축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하므로 주어진 방정식은

$2(x-3)+(y+2)+5=0$ 으로 이동된다.

따라서, $2x+y+1=0$

10. 직선 $y=x+n$ 과 원 $x^2+y^2=8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(0,\ 0)$ 에서 직선 $y=x+n$ 까지의 거리가 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$$

$\therefore\ n > 4$ ($\because$ n 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 n 은 5 이다.

11. $x^2+y^2=1$일 때, $2x+y$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

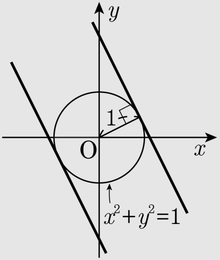
▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 $\sqrt{5}$

▷ 정답 : 최솟값 $-\sqrt{5}$

해설



구하는 $2x+y=k$라 하면 $y=-2x+k$에서 k는 기울기가 -2인 직선의 y절편이다.
주어진 조건을 만족할 때, 직선은 다음 그림과 같이 존재하므로 점과 직선사이의 거리에서 $\dfrac{|k|}{\sqrt{5}} \le 1$

$\therefore\ -5 \le k \le \sqrt{5}$

12. 직선 $y=x+4$가 원 $x^2+y^2=9$에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

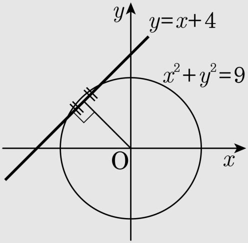
▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x-y+4=0$

이므로 $\dfrac{|4|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을
수직이등분하므로 피타고라스 정리에서 ,

현의 길이는 $2\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=2$

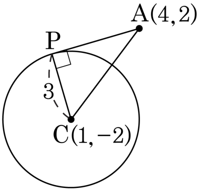
13. 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 이 주어졌을 때, 점 A(4, 2) 에서 그은 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면
$(x-1)^2+(y+2)^2=9$ 이다.
다음 그림에서 접선의 길이는
$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CP}^2}$
한편, $\overline{AC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$ 이고 $\overline{CP}=3$
$\therefore \overline{AP}=4$



14. $x^2 + y^2 = 5$에 접하고, 기울기가 -2이며, 제 $1, 2, 4$사분면을 지나는 접선의 방정식을 구하면?

① $y = -2x - \sqrt{5}$

② $y = -2x + 5\sqrt{5}$

③ $y = -2x - 3\sqrt{5}$

④ $y = -2x + 3\sqrt{5}$

⑤ $y = -2x - 5\sqrt{5}$

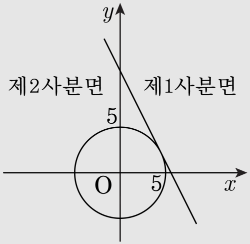
해설

기울기가 -2인 직선의 방정식을 $y = -2x + c$라 하고, 직선과 원점간의 거리가 원의 반지름인 5와 같으므로 $\dfrac{|-c|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 5$

$\therefore\ c = \pm 5\sqrt{5}$

다음 그림과 같이 제 $1, 2, 4$사분면을 지나야 하므로 $\therefore\ c = 5\sqrt{5}$

$\therefore y = -2x + 5\sqrt{5}$



15. 점 $(3,\ -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 두 개의 접선의 기울기를 합하면?

① $\frac{3}{2}$　② $\frac{5}{2}$　③ 0　④ $-\frac{3}{2}$　⑤ $-\frac{5}{2}$

해설

$(3,\ -1)$을 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면

$y = m(x-3)-1 = mx-3m-1$

원 중심에서 접선까지 거리는 반지름과 같으므로

$$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$$

$(-3m-1)^2 = 5m^2+5$

$4m^2+6m-4=0$

$2m^2+3m-2=0$

$m = -2,\ \frac{1}{2}$

16. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$x^2+y^2-8x-6y+21=0$

$(x-4)^2+(y-3)^2=2^2$

$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{\mathrm{OP}}$ $\quad \sqrt{4^2+3^2}+2=7$

17. 좌표평면 위의 두 점 $A(8,0)$, $B(0,6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 일 때, 세 상수 a,b,c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle AOB = 90°$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.
$\overline{AB}=10$ 이고 원의 중심은 $C(4,3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x-4)^2+(y-3)^2=5^2$
이 식을 정리하면 $x^2+y^2-8x-6y=0$
$a=-8,\ b=-6,\ c=0$
$\therefore abc=0$

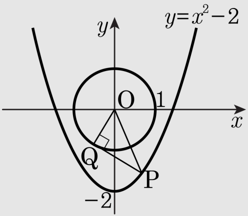
18. $y=x^2-2$ 위의 점 P에서 원 $x^2+y^2=1$에 접선을 그을 때, 그 접점을 Q라고 하자. 선분 PQ의 길이의 최솟값은?

① 1 ② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$P(x,\ x^2-2)$, $O(0,0)$ 라고 하면 $\triangle OPQ$는 직각삼각형이다.

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= \overline{OP}^2-\overline{OQ}^2\\ &= x^2+(x^2-2)^2-1\\ &= x^4-3x^2+3\\ &= \left(x^2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\end{aligned}$$



$\overline{PQ}^2$의 최솟값은 $x^2=\dfrac{3}{2}$일 때, $\dfrac{3}{4}$이다.

따라서, $\overline{PQ}$의 최솟값은 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.

19. 원 $x^2+y^2+6x-4y+1=0$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시킨 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하면?

① $(-1,-1)$, $2\sqrt{3}$ ② $(0,0)$, $3\sqrt{3}$ ③ $(1,1)$, $4\sqrt{3}$
④ $(2,2)$, $5\sqrt{3}$ ⑤ $(3,3)$, $6\sqrt{3}$

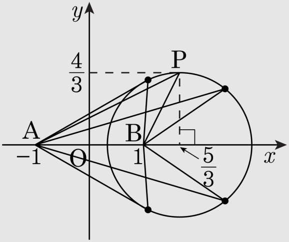
해설

$x^2+y^2+6x-4y+1=0$
$\left(x^2+6x+9\right)+\left(y^2-4y+4\right)=12$
$(x+3)^2+(y-2)^2=12$
이 원의 중심의 좌표는 $(-3,2)$ 이고
반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$ 이다.
따라서, 이 원을 x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시켰을 때,
중심의 좌표는 $(-3+2, 2-3)=(-1,-1)$ 이고,
반지름의 길이는 변하지 않으므로 $2\sqrt{3}$ 이다.

20. 좌표평면 위의 두 점 A(−1, 0), B(1, 0) 으로부터의 거리의 비가 2 : 1 이 되도록 움직이는 점 P 가 있다. 이때, △PAB 의 넓이가 자연수가 되는 점의 개수는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설



점 P 의 좌표를 $\mathrm{P}(x, y)$ 라 하면

$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 2 : 1$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}} = 2\overline{\mathrm{BP}}$

$\therefore \overline{\mathrm{AP}}^2 = 4\overline{\mathrm{BP}}^2$

$(x+1)^2 + y^2 = 4\left\{(x-1)^2 + y^2\right\}$

$3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0$

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$$

이때, △PAB 의 넓이는 밑변 AB 가 고정되어 있으므로 높이에 따라 변하게 된다.

즉, 높이가 반지름의 길이와 같을 때, 넓이가 최대이며 △PAB 의 넓이의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ 이므로,

넓이가 자연수 1 이 되는 점은 4 개다.

21. 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 P에서의 접선이 점 $(3,\ 1)$을 지날 때, 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$라 할 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

접점을 (x_1, y_1)이라 하면 접선은

$x_1x+y_1y=5 \cdots ①$

이것이 점 $(3, 1)$을 지나므로

$3x_1+y_1=5 \cdots ②$

또, (x_1, y_1)은 $x^2+y^2=5$

위의 점이므로 $x_1^2+y_1^2=5 \cdots ③$

② 에서 $y_1=5-3x_1$ 을 ③에 대입하면

$x_1^2+(5-3x_1)^2-5=0$,

$10x_1^2-30x_1+20=0$

$10(x_1-1)(x_1-2)=0$

$\therefore x_1=1$이면 $y_1=2$, $x_1=2$이면 $y_1=-1$

$\therefore$ 접점은 $(1, 2), (2, -1)$

22. 한 정점 A$(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 에 이르는 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할때, $M+m$ 의 값은?

① $2\sqrt{31}$　　② $4\sqrt{2}+2\sqrt{31}$　　③ $2\sqrt{34}$

④ $4\sqrt{2}+2\sqrt{34}$　　⑤ $8\sqrt{2}$

해설

$x^2+y^2-2x+4y-3=(x-1)^2+(y+2)^2-8=0$

에서

$(x-1)^2+(y+2)^2=(2\sqrt{2})^2$

그림에서 점과 원 사이의 거리의 최댓값은

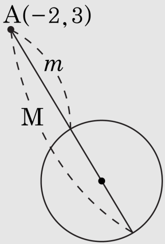
(점과 원의 중심 사이의 거리)+(반지름)

즉 $\sqrt{(-2-1)^2+(3+2)^2}+2\sqrt{2}=2\sqrt{2}+\sqrt{34}$

최솟값은 (점과 원의 중심 사이의 거리)-반지름

$=\sqrt{34}-2\sqrt{2}$

$\therefore M+m=2\sqrt{34}$



23. 두 점 $A(1,\ 0)$, $B(4,\ 0)$으로부터의 거리의 비가 $2:1$인 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

주어진 조건에서 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2:1$이므로

$\overline{AP} = 2\overline{BP}$

$\therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$

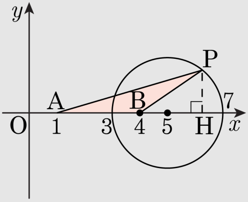
점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓으면

$(x-1)^2 + y^2 = 4\left\{(x-4)^2 + y^2\right\}$

$\therefore (x-5)^2 + y^2 = 4$

따라서 점 P는 중심이 $(5,\ 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원 위를 움직인다.

그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{PH}$의 길이가 반지름의 길이와 같을 때 삼각형 PAB의 넓이가 최대가 되므로 $\triangle PAB = \dfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PH} \le \dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 2 = 3$



따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은 3이다.