1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ 일 때, $f(x) - 2 = x(x^2 - 1) + a(x - x^2) + b(x^2 - 1)$ 가 항상 성립하도록 하는 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) - 2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ 이므로
 $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x(x^2 - 1) + a(x - x^2) + b(x^2 - 1)$
 $= x^3 + (-a + b)x^2 + (a - 1)x - b \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 이 x 에 대한 항등식이므로 양변의 차수가 같은 항의 계수가 같아야 한다.
즉, $-a + b = -3, a - 1 = 3, b = 1$
이므로 $a = 4, b = 1$
 $\therefore a + b = 5$

2. 등식 $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1)$ 이 x 에 관한 항등식이 되도록 할 때, $2ab$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 2 ⑤ 4

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면, $-2 = 2a \quad \therefore a = -1$
양변에 $x = 1$ 을 대입하면, $-3 = -b \quad \therefore b = 3$
 $\therefore 2ab = -6$

3. 다음 등식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, xy 의 값을 구하여라.

$$(2k + 3)x + (3k - 1)y + 5k - 9 = 0$$

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

k 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(2x + 3y + 5)k + (3x - y - 9) = 0$$

이것은 k 에 대한 항등식이므로

$$2x + 3y + 5 = 0$$

$$3x - y - 9 = 0$$

연립방정식을 풀면 $x = 2, y = -3$

$$\therefore xy = 2 \times (-3) = -6$$

4. 다항식 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$ 을 $x - 2$, $x - 1$ 로 나누었을 때의 나머지를 각각 a, b 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① -8 ② -2 ③ -16 ④ 4 ⑤ 2

해설

$$f(x) = (x-2)Q(x) + a$$

$$f(x) = (x-1)Q'(x) + b$$

$$f(2) = 4 = a, f(1) = -2 = b$$

$$\therefore a + b = 2$$

5. 등식 $3x^2 + 2x + 1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$ 이 x 에 관한 항등식일 때, 상수 b 의 값은?

- ① 3 ② -4 ③ 2 ④ 8 ⑤ 6

해설

$$3x^2 + 2x + 1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

$$= (x-1) \{a(x-1) + b\} + c$$

1	3	2	1	
	3	5	6	← c
1	3	5	6	
	3	8	← c	
	↑			
	a			

해설

$x = 1$ 을 대입하면 $c = 6$

$$3x^2 + 2x + 1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + 6$$

$$\rightarrow 3x^2 + 2x - 5 = a(x-1)^2 + b(x-1)$$

$$\rightarrow (x-1)(3x+5) = a(x-1)^2 + b(x-1)$$

→ 양변을 $x-1$ 로 나누면

$$3x+5 = a(x-1) + b = ax - a + b$$

$$\therefore a = 3, b = 8$$

※ 준식의 우변을 모두 전개해서 계수비교하여 구할 수도 있다.

6. 다음 세 다항식에서 최대공약수를 구하면?

$$2x^2 - 3x + 1, 3x^2 - x - 2, x^2 + 3x - 4$$

- ① $x - 1$ ② $2x - 1$ ③ $x - 2$
④ $x + 3$ ⑤ $x + 1$

해설

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x + 1 &= (2x - 1)(x - 1) \\ 3x^2 - x - 2 &= (3x + 2)(x - 1) \\ x^2 + 3x - 4 &= (x + 4)(x - 1) \end{aligned}$$

따라서 최대 공약수는 $x - 1$ 이다.

7. 다음 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (\square x^2 + \square x + \square) = x + 2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$$\square x^2 + \square x + \square = A \text{ 라 하면}$$

$$(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div A = x + 2$$

$$\therefore A = (x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (x + 2)$$

$$\therefore A = x^2 + 2x - 1 \text{ 이므로}$$

안에 알맞은 수는 차례대로 1, 2, -1이다.

8. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - x$ 로 나누면 3이 남고 $x^2 + x - 6$ 로 나누면 $x - 1$ 이 남을 때, $f(x)$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때의 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(1)$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ -2 ⑤ -3

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x-1)Q_1(x) + 3 \\ f(x) &= (x-2)(x+3)Q_2(x) + x-1 \\ f(x) &= (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b \\ f(1) &= 3, f(2) = 1 \text{ 이므로} \\ a + b &= 3, 2a + b = 1 \\ \text{연립하여 풀면, } a &= -2, b = 5 \\ \therefore (\text{구하는 나머지}) R(x) &= -2x + 5 \\ \therefore R(1) &= 3 \end{aligned}$$

9. x 에 대한 다항식 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+a$ 가 x 에 대한 완전제곱식으로 인수분해 될 때, 정수 a 의 값은?

- ① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+a \\ &= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+a \\ x^2+5x+4 &= Y \text{로 치환하면} \\ (\text{준식}) &= Y(Y+2)+a \\ &= Y^2+2Y+a \\ \therefore \text{완전제곱식이 되려면 } a &= 1\end{aligned}$$

10. $3x^2 + 2xy - y^2 - x + 3y - 2$ 의 인수인 것은?

- ① $2x + y + 1$ ② $x + y + 1$ ③ $2x - y + 1$
④ $3x - y + 2$ ⑤ $3x + y + 2$

해설

준 식을 내림차순으로 정리하면
 $3x^2 + 2xy - x - y^2 + 3y - 2$
 $= 3x^2 + (2y - 1)x - (y - 1)(y - 2)$
인수분해하면 $(x + y - 1)(3x - y + 2)$

12. $a + b + c = 4$, $ab + bc + ca = 3$, $abc = 1$ 일 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값을 구하면?

- ① 30 ② 31 ③ 32 ④ 33 ⑤ 34

해설

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\ \text{위 식에 따라 } a^2 + b^2 + c^2 + 6 &= 16 \\ \therefore a^2 + b^2 + c^2 &= 10 \\ a^3 + b^3 + c^3 &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= 4 \times (10 - 3) + 3 \times 1 \\ &= 31\end{aligned}$$

13. $x^4 + 2x^2 + 9 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ 로 인수분해될 때, $|ab - cd|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x^2 + 3)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3)\end{aligned}$$

여기서 계수를 비교하면

$$a = 2, b = 3, c = -2, d = 3$$

$$\therefore |ab - cd| = |2 \times 3 - (-2) \times 3| = 12$$

14. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2 - 5x - 3$ 이고 최소공배수가 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 일 때, 두 다항식의 최대공약수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $x - 3$

해설

두 다항식을 A, B 라고 하면

$$A + B = (a + b)G, L = abG,$$

즉, 최대공약수는 두 식의 합과 최소공배수의 공약수이다.

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 1)(x + 2)$$

$$2x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(2x + 1)$$

$$\therefore G = x - 3$$

15. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ 이고, $a = \sqrt{3} + 1$ 일 때, $a^x \div a^{2\sqrt{2}x+3}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$

② $\frac{4 + \sqrt{3}}{4}$

③ $\frac{2\sqrt{3} - 3}{4}$

④ $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$

⑤ $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

해설

(i) $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ 에서 $x - \sqrt{2} = \sqrt{3}$

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 3$$

$$\therefore x^2 - 2\sqrt{2}x = 1$$

(ii) $a^x \div a^{2\sqrt{2}x+3} = a^{x^2 - 2\sqrt{2}x - 3} = a^{-2}$

$$= \frac{1}{a^2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

16. $a = (3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)\cdots(3^{1024}+1)$ 이라고 할 때 곱셈 공식을 이용하여 a 의 값을 지수의 형태로 나타내면 $\frac{1}{k}(3^l+m)$ 이다. 이 때, $k+l+m$ 의 값을 구하면?

- ① 2046 ② 2047 ③ 2048 ④ 2049 ⑤ 2050

해설

$$\begin{aligned}
 a &= (3+1)(3^2+1)\cdots(3^{1024}+1) \\
 \text{양변에 } (3-1) \text{을 곱하면} \\
 (3-1)a &= (3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1) \\
 &\quad \cdots(3^{1024}+1) \\
 2a &= (3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)\cdots(3^{1024}+1) \\
 &= (3^4-1)(3^4+1)\cdots(3^{1024}+1) \\
 &= (3^8-1)\cdots(3^{1024}+1) \\
 &\quad \vdots \\
 &= (3^{2048}-1) \\
 \text{양변을 2로 나누면} \\
 a &= \frac{1}{2}(3^{2048}-1) \\
 \therefore k &= 2, l = 2048, m = -1 \\
 \therefore k+l+m &= 2049
 \end{aligned}$$

17. $a(a+1) = 1$ 일 때, $\frac{a^4 - a^2}{a^6 - 1}$ 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$a(a+1) = 1 \text{ 에서}$$

$$a^2 = -a + 1$$

$$a^4 = (-a+1)^2 = a^2 - 2a + 1$$

$$= (-a+1) - 2a + 1 = -3a + 2$$

$$a^6 = a^4 \times a^2 = (-3a+2)(-a+1)$$

$$= 3a^2 - 5a + 2 = 3(-a+1) - 5a + 2$$

$$= -8a + 5$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a^4 - a^2}{a^6 - 1} &= \frac{-3a + 2 - (-a + 1)}{-8a + 5 - 1} \\ &= \frac{-2a + 1}{-8a + 4} = \frac{-2a + 1}{4(-2a + 1)} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

18. 모든 실수 x 에 대하여 $x^{10} + 1 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots + a_{10}(x-1)^{10}$ 이 성립할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{10}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 513

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_{10} \cdots \textcircled{1}$$

양변에 $x = 2$ 을 대입하면

$$2^{10} + 1 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{10} \cdots \textcircled{2}$$

① + ②에 의해

$$2^{10} + 2 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{10})$$

$$\therefore (a_0 + a_2 + \dots + a_{10}) = 2^9 + 1 = 513$$

19. 세 실수 a, b, c 가 $a + b + c = 3$, $a^2 + b^2 + c^2 = 9$, $a^3 + b^3 + c^3 = 24$ 를 만족시킬 때, $a^4 + b^4 + c^4 + 1$ 의 값을 구하면?

- ① 69 ② 70 ③ 71 ④ 72 ⑤ 73

해설

$$\begin{aligned}
 a + b + c &= 3 \cdots ① \\
 a^2 + b^2 + c^2 &= 9 \cdots ② \\
 a^3 + b^3 + c^3 &= 24 \cdots ③ \text{ 이라 하면,} \\
 \text{②식에서} \\
 a^2 + b^2 + c^2 &= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 9 \\
 9 - 2(ab + bc + ca) &= 9 \\
 \therefore ab + bc + ca &= 0 \cdots ④ \\
 \text{③식에서} \\
 a^3 + b^3 + c^3 &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\
 24 &= 3 \cdot (9 - 0) + 3abc \\
 \therefore abc &= -1 \cdots ⑤ \\
 a^4 + b^4 + c^4 + 1 &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 1 \\
 &= 81 - 2 \cdot 6 + 1 = 70 \\
 (\because a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &= (ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c) \\
 &= 0 - 2 \times (-1) \times 3 \\
 &= 6)
 \end{aligned}$$

20. 다항식 $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 1이고, 또 $Q(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 -2 이다. $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$f(x) = (x-3)Q(x) + 1$$

$$Q(2) = -2$$

$f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는 $f(2)$ 이다.

$$\begin{aligned} f(2) &= (2-3)Q(2) + 1 \\ &= -1 \times (-2) + 1 = 3 \end{aligned}$$