

1. 실수의 집합에서 실수의 집합으로의 함수 $f(x)$ 가 다음과 같이 주어질 때 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ 를 차례대로 구하여라.

$$f(x) = 2x + 1$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 5

해설

다음 요령에 따르면 된다.
 $f(0) = 2 \times 0 + 1 = 1, f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3, f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$

2. 함수 $y = 2x - 2$ 의 역함수를 구하면?

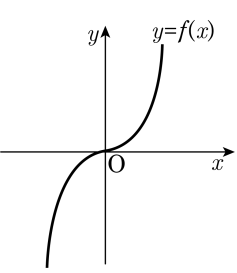
- ① $y = \frac{1}{2}x - 1$ ② $y = \frac{1}{2}x + 1$ ③ $y = -\frac{1}{2}x + 1$
④ $y = -\frac{1}{2}x - 1$ ⑤ $y = -\frac{1}{2}x + 2$

해설

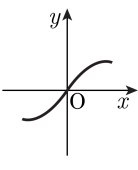
$$y = 2x - 2, x = \frac{1}{2}y + 1 \quad x, y \text{ 를 바꿔주면}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$$

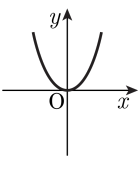
3. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때,
다음 중 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프로 적당한 것은
무엇인가?



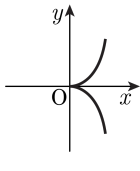
①



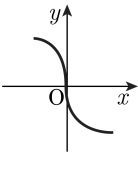
②



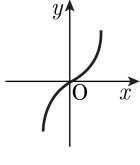
③



④



⑤



해설

$y = f(x)$ 의 그래프와
그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

4. $\frac{x}{x^2 - xy} + \frac{y}{y^2 - xy}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned} \text{(준식)} &= \frac{x}{x(x-y)} + \frac{y}{y(y-x)} = \frac{1}{x-y} + \frac{-1}{x-y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

5. 분수함수 $y = \frac{bx+3}{x+a}$ 의 점근선이 $x=1, y=6$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -5

② 5

③ -7

④ 7

⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$y = \frac{bx+3}{x+a}$ 의 점근선은 $x=1, y=6$ 이므로

$$y = \frac{6(x-1)+9}{x-1} = \frac{9}{x-1} + 6$$

$\therefore a = -1, b = 6$

$\therefore a+b = 5$

6. 두 함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ 에 대하여 $(f \circ g)(x)$ 를 구하면?

① $(f \circ g)(x) = (x + 2)^2$ ② $(f \circ g)(x) = x^2 + 2$

③ $(f \circ g)(x) = (x - 2)^2$ ④ $(f \circ g)(x) = x^2 - 2$

⑤ $(f \circ g)(x) = -x^2 + 2$

해설

두 함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ 에 대하여
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2$

7. 두 함수 f, g 가 일대일대응일 때, 다음 중 $g \circ (f \circ g)^{-1}$ 와 같은 것을 고르면?

① f

② f^{-1}

③ g

④ g^{-1}

⑤ $g \circ f^{-1}$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)^{-1} &= g^{-1} \circ f^{-1} \text{ 이므로} \\ g \circ (f \circ g)^{-1} &= g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \\ &= (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} \\ &= f^{-1}\end{aligned}$$

8. $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 4} \times \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4x + 3} \div \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + 3x - 4}$ 을 간단히 하면 ?

- ① $\frac{4}{x-3}$ ② $\frac{1}{x+4}$ ③ $\frac{2}{x+2}$ ④ 1 ⑤ 0

해설

(주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+4)} \times \frac{(x+1)(2x+1)}{(x-1)(x-3)} \\
 &\quad \div \frac{(x-2)(2x+1)}{(x-1)(x+4)} \\
 &= \frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+4)} \times \frac{(x+1)(2x+1)}{(x-1)(x-3)} \\
 &\quad \times \frac{(x-1)(x+4)}{(x-2)(2x+1)} = 1
 \end{aligned}$$

9. $x^2 \neq 4$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2}$ 을 만족시키는 상수 a 와 b 가 있다. 이때, $a+b$ 의 값은?

① -6 ② -3 ③ -1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2}$ 의 우변을 통분하여 계산하면

$$\begin{aligned}\frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} &= \frac{a(x-2)}{x^2-4} - \frac{b(x+2)}{x^2-4} \\ &= \frac{(a-b)x - 2(a+b)}{x^2-4}\end{aligned}$$

따라서 $a-b=1$, $-2(a+b)=6$

$\therefore a=-1$, $b=-2$

$\therefore a+b=-1-2=-3$

10. $\frac{x}{5} = \frac{y+4z}{2} = \frac{z}{3} = \frac{-x+2y}{A}$ 에서 A 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $A = -25$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{-x+2(y+4z)-8 \times z}{-5+2 \times 2-8 \times 3} \\ &= \frac{-x+2y+8z-8z}{-5+4-24} = \frac{-x+2y}{-25} \\ & \therefore A = -25 \end{aligned}$$

11. 유리수 a, b 에 대하여 $(1+2\sqrt{2})a + (-1+\sqrt{2})b = 5+7\sqrt{2}$ 가 성립할 때, $a+b$ 의 값은?

① 3 ② 2 ③ 0 ④ -2 ⑤ -3

해설

$$(1+2\sqrt{2})a + (-1+\sqrt{2})b = 5+7\sqrt{2}$$

$$(a-b) + (2a+b)\sqrt{2} = 5+7\sqrt{2} \cdots \text{㉠}$$

a, b 가 유리수이면

$a-b, 2a+b$ 도 유리수이므로 ㉠에서

$$\begin{cases} a-b=5 \\ 2a+b=7 \end{cases}$$

이것을 연립하여 풀면 $a=4, b=-1$

$$\therefore a+b=3$$

12. $x > 2$ 에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$ 가

$f(x) = \sqrt{x-2} + 2, g(x) = \frac{1}{x-2} + 2$ 일 때, $(f \circ g)(3) + (g \circ f)(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$$

$$\therefore (f \circ g)(3) + (g \circ f)(3) = 6$$

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 가

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & (x \text{가 유리수}) \\ 2x & (x \text{가 무리수}) \end{cases} \text{ 일 때,}$$

$f(x) - f(x-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(i) x 가 유리수일 때, $x-1$ 도 유리수이므로

$$\begin{aligned} f(x) - f(x-1) &= 2x-1 - \{2(x-1) - 1\} \\ &= 2x-1 - (2x-3) = 2 \end{aligned}$$

(ii) x 가 무리수일 때, $x-1$ 도 무리수이므로

$$f(x) - f(x-1) = 2x - 2(x-1) = 2$$

따라서 (i),(ii)에서 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) - f(x-1) = 2$$

14. 두 집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ 가 있다. A 에서 B 로의 일대일 함수 f 중 $f(1) = 4$ 를 만족하는 f 의 개수를 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$f(1) = 4$ 이므로 $\{2, 3\}$ 에서 $\{5, 6, 7\}$ 로 가는 일대일 함수의 개수와 같다.
 $\therefore 3 \times 2 = 6$

15. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a, b, c, d, e\}$ 로의 일대일 대응 f 중 $f(1) = a, f(2) = b$ 인 f 의 개수는?

① 4 개 ② 6 개 ③ 8 개 ④ 12 개 ⑤ 16 개

해설

$f(1) = a, f(2) = b$ 이므로 $f : A \rightarrow B$ 가 일대일 대응이라면
 $f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2)$ 의 값을 제외한 3 개,
 $f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 제외한 2 개,
 $f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값을 제외한 1 개이다.
따라서, 일대일 대응 f 의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 개

16. 두 함수 $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = 4 - 3x$ 에 대하여 $h \circ f = g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 는?

① $h(x) = \frac{1}{3}(x + 1)$

② $h(x) = 3x - 1$

③ $h(x) = x - 3$

④ $h(x) = 3 - x$

⑤ $h(x) = x + 3$

해설

$(h \circ f)(x) = 4 - 3x$ 에서

$f(x) = t$ 라 하면 $t = 3x - 1$, $3x = t + 1$

$x = \frac{1}{3}(t + 1)$ 을 대입하면

$$h(t) = 4 - 3 \times \frac{1}{3}(t + 1) = 3 - t$$

$$\therefore h(x) = 3 - x$$

17. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = ax + b|x|$ (a, b 는 상수)가 역함수를 가질 조건은?

- ① $a^2 - b^2 < 0$ ② $a^2 - b^2 > 0$ ③ $a + b > 0$
④ $a - b > 0$ ⑤ $a - b < 0$

해설

$$f(x) = \begin{cases} (a+b)x & (x \geq 0) \\ (a-b)x & (x < 0) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 역함수를 가지려면

$f(x)$ 가 증가함수이거나 감소함수이어야 하므로

두 직선 $y = (a+b)x, y = (a-b)x$ 의 기울기의 부호가 같아야 한다.

$$\therefore (a+b)(a-b) > 0, \quad a^2 - b^2 > 0$$

18. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \geq 0) \\ x + 1 & (x < 0) \end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(5) + g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$g(5) = a$ 라 하면 $f^{-1}(5) = a$ 에서 $f(a) = 5$
그런데 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) = x^2 + 1 \geq 1$ 이므로
 $f(a) = a^2 + 1 = 5$
 $\therefore a = 2 (\because a \geq 0) \therefore g(5) = 2$
또, $g(0) = b$ 라 하면 $f^{-1}(0) = b$ 에서 $f(b) = 0$
그런데 $x < 0$ 일 때, $f(x) = x + 1 < 1$ 이므로
 $f(b) = b + 1 = 0$
 $\therefore b = -1 \therefore g(0) = -1$
 $\therefore g(5) + g(0) = 2 - 1 = 1$

19. 0이 아닌 실수 x, y 가 $\frac{x-y}{4x+2y} = \frac{1}{3}$ 을 만족할 때, 유리식 $\frac{x^2-5y^2}{2xy}$ 의 값은?

- ① -2 ② 1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\frac{x-y}{4x+2y} &= \frac{1}{3} \Rightarrow 3x-3y=4x+2y & x &= -5y \\ \therefore \frac{x^2-5y^2}{2xy} &= \frac{20y^2}{-10y^2} = -2\end{aligned}$$

20. $\sqrt{10-8\sqrt{3-\sqrt{8}}}$ 의 소수 부분을 구하면?

① $\sqrt{2}$

② $4-\sqrt{2}$

③ $3-\sqrt{2}$

④ $2-\sqrt{2}$

⑤ $1-\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{10-8\sqrt{3-\sqrt{8}}} &= \sqrt{10-8\sqrt{3-2\sqrt{2}}} \\ &= \sqrt{10-8(\sqrt{2}-1)} \\ &= \sqrt{18-8\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{18-2\sqrt{32}} \\ &= 4-\sqrt{2} \approx 2. \times \times \times \\ \therefore \text{정수 부분: } 2, \text{ 소수 부분: } 2-\sqrt{2}\end{aligned}$$

21. $0 \leq a < 2$ 이고 $x = \frac{4a}{a^2 + 4}$ 일 때
 $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$1+x = 1 + \frac{4a}{a^2+4} = \frac{a^2+4a+4}{a^2+4} = \frac{(a+2)^2}{a^2+4}$$

$$1-x = 1 - \frac{4a}{a^2+4} = \frac{a^2-4a+4}{a^2+4} = \frac{(a-2)^2}{a^2+4}$$

$a^2+4 > 0$ 이고 $0 < a < 2$ 이므로

$a+2 > 0$, $a-2 < 0$

$$\therefore \sqrt{1+x} = \sqrt{\frac{(a+2)^2}{a^2+4}} = \frac{a+2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{\frac{(a-2)^2}{a^2+4}} = \frac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} &= \frac{a+2}{\sqrt{a^2+4}} + \frac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{a^2+4}} \end{aligned}$$

$\therefore a=0$ 일 때 최댓값 2

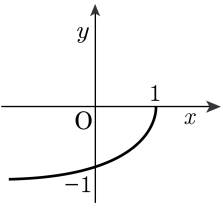
22. 다음 중 함수 $y = a\sqrt{bx}$ 의 그래프가 그려지는 사분면을 옳게 나타낸 것을 고르면? (단, $ab \neq 0$)
- ① $ab > 0$ 이면 제 3사분면
 - ② $ab < 0$ 이면 제 4사분면
 - ③ $a < 0, b > 0$ 이면 제 4사분면
 - ④ $a > 0, b < 0$ 이면 제 1사분면
 - ⑤ $a < 0, b < 0$ 이면 제 2사분면

해설

㉠ $ab > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \text{ 이고 } b > 0) \text{ 또는 } (a < 0 \text{ 이고 } b < 0)$ 이므로 제 1사분면 또는 제 3사분면에 그래프가 그려진다.
㉡ $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \text{ 이고 } b < 0) \text{ 또는 } (a < 0 \text{ 이고 } b > 0)$ 이므로 제 2사분면 또는 제 4사분면에 그래프가 그려진다.
㉢ $a < 0, b > 0$ 이면 제 4사분면에 그래프가 그려진다.
㉤ $a > 0, b < 0$ 이면 제 2사분면에 그래프가 그려진다.
㉥ $a < 0, b < 0$ 이면 제 3사분면에 그래프가 그려진다.

23. $y = -\sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프의 개형이 아래 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4



해설

$$y = -\sqrt{ax+b} + c = -\sqrt{a\left(x + \frac{b}{a}\right)} + c$$

점(1, 0)에서 시작이므로 $-\frac{b}{a} = 1, c = 0$

$\therefore b = -a, c = 0$

이것을 주어진 식에 대입하면 $y = -\sqrt{ax-a}$ 이고

주어진 그래프가 점(0, -1)를 지나므로

$$-1 = -\sqrt{-a}$$

양변을 제곱을 하면 $1 = -a$

$\therefore a = -1$

따라서 $a = -1, b = 1, c = 0$ 이므로

$$a+b+c = -1+1+0 = 0$$

24. x 에 대한 방정식 $\sqrt{2x} = m(x+1)$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 상수 m 의 값의 범위는 $\alpha < m < \beta$ 이다. 이때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 2

해설

방정식 $\sqrt{2x} = m(x+1)$ 의 해는
두 그래프 $y = \sqrt{2x}$ 와 $y = m(x+1)$ 의 교점의 x 좌표이다.
이때, 직선 $y = m(x+1)$ 은 m 의 값에 관계없이
점 $(-1, 0)$ 을 지난다.
 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프와 직선 $y = m(x+1)$ 이
서로 다른 두 점에서 만나려면 $m > 0$ 이고,
 m 은 두 그래프가 접할 때의 기울기보다 작아야 한다.
 $\sqrt{2x} = m(x+1)$ 의 양변을 제곱하면
 $2x = m^2(x+1)^2$
 $m^2x^2 + 2(m^2-1)x + m^2 = 0$
이 방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (m^2-1)^2 - m^4 = 0$
 $-2m^2 + 1 = 0, m^2 = \frac{1}{2}$
 $\therefore m = \frac{1}{\sqrt{2}} (\because m > 0)$
따라서, m 의 값의 범위는 $0 < m < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로
 $\therefore \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2}$

25. 함수 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프가 나타내는 함수의 식을 $y = f(x)$ 라 할 때, $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 접하도록 상수 a 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{1}{2}$
- ② $-\frac{1}{4}$
- ③ 0
- ④ $\frac{1}{4}$
- ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

함수 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한
그래프의 식은 $y = \sqrt{2(x-a)}$
 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 접하려면
 $y = \sqrt{2(x-a)}$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 접해야 한다.
즉, $\sqrt{2(x-a)} = x$ 양변을 제곱하여 정리하면
 $x^2 - 2x + 2a = 0$
 $\frac{D}{4} = (-1)^2 - 2a = 0$ 이므로
 $a = \frac{1}{2}$