

1. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \geq 0$ 의 해를 구하면?

① 해가 없다

② $x = 3$

③ $x \neq 3$ 인 모든 실수

④ $-3 < x < 3$

⑤ 모든 실수

해설

$(x - 3)^2 \geq 0$, (실수) $^2 \geq 0$ 이므로
∴ ⑤ 모든 실수

2. 이차부등식 $-4x^2 + 12x - 9 \geq 0$ 의 해는?

① $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

② $x \leq -\frac{3}{2}, x \geq \frac{3}{2}$

③ $x \neq \frac{3}{2}$ 인 모든 실수

④ 해는 없다.

⑤ $x = \frac{3}{2}$

해설

$$\begin{aligned} & -4x^2 + 12x - 9 \geq 0 \\ \Rightarrow & 4x^2 - 12x + 9 \leq 0 \\ \Rightarrow & (2x - 3)^2 \leq 0 \\ \therefore & x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

3. 부등식 $ax^2 + (a+1)x + a > 0$ 을 만족하는 실수 x 가 존재하기 위한 상수 a 의 값의 범위는?

① $a > -1$

② $a > -\frac{1}{2}$

③ $a > -\frac{1}{3}$

④ $a > -\frac{1}{4}$

⑤ $a > -\frac{1}{5}$

해설

$ax^2 + (a+1)x + a > 0$ 에서

i) $a = 0$ 이면 $x > 0$

$\therefore$ 실수해가 존재한다.

ii) $a > 0$ 이면 $y = ax^2 + (a+1)x + a$ 의 그래프가 아래로 볼록한 모양이므로

$ax^2 + (a+1)x + a > 0$ 을 만족시키는 x 값이 반드시 존재한다.

iii) $a < 0$ 이면 $D = (a+1)^2 - 4a^2 > 0$

$$3a^2 - 2a - 1 < 0, (3a+1)(a-1) < 0$$

$$\therefore -\frac{1}{3} < a < 1, a < 0 \text{ 이므로 } -\frac{1}{3} < a < 0$$

i), ii), iii)에서 $a > -\frac{1}{3}$

4. 부등식 $x^2 - 2x - 2 < 2|x - 1|$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, $\beta - \alpha$ 의 값은?

① 0

② -2

③ 2

④ 6

⑤ -6

해설

$x^2 - 2x - 2 < 2|x - 1|$ 에서 구간을 나누어 해를 구한다.

(i) $x \geq 1$ 일 때, $x^2 - 2x - 2 < 2(x - 1)$

$x^2 - 4x < 0$, $x(x - 4) < 0$, $0 < x < 4$

공통범위는 $1 \leq x < 4$

(ii) $x < 1$ 일 때, $x^2 - 2x - 2 < -2(x - 1)$

$x^2 - 4 < 0$, $-2 < x < 2$

공통범위는 $-2 < x < 1$

i + ii : $-2 < x < 4 \Leftrightarrow \alpha < x < \beta$

$\therefore \beta - \alpha = 4 - (-2) = 6$

5. 부등식 $2[x]^2 - 9[x] + 9 < 0$ 을 만족하는 x 의 값의 범위는? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수)

- ① $\frac{2}{3} < x < \frac{7}{2}$ ② $\frac{3}{2} < x \leq 3$ ③ $2 \leq x < 3$
④ $1 \leq x < 3$ ⑤ $1 \leq x \leq 4$

해설

$[x] = t$ 로 놓으면 $2t^2 - 9t + 9 < 0$ 이므로

부등식을 풀면 $(2t - 3)(t - 3) < 0$

$$\therefore \frac{3}{2} < t < 3$$

따라서, $\frac{3}{2} < [x] < 3$ 에서 $[x] = 2$

$$\therefore 2 \leq x < 3$$

6. 임의의 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2ax + 2a + 3 \geq 0$ 이 성립하기 위한 상수 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 + 2ax + 2a + 3 \geq 0$ 이 항상 성립할 조건은

$$D/4 = a^2 - 2a - 3 = (a + 1)(a - 3) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 3$$

a 의 최솟값은 -1

7. 모든 실수 x 에 대해 이차부등식 $x^2 - x(kx - 3) + 3 > 0$ 이 항상 성립하기 위한 정수 k 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 부등식을 정리하면

$$(1 - k)x^2 + 3x + 3 > 0$$

$$D = 3^2 - 4 \times (1 - k) \times 3 < 0$$

$$\therefore k < \frac{3}{12} = 0.25$$

최대 정수 $k = 0$

8. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 2mx - m \geq 0$ 을 만족하는 실수 m 의 범위는 $a \leq m \leq b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -1$

해설

$$x^2 - 2mx - m \geq 0 \text{ 이}$$

항상 성립하려면 판별식 $D \leq 0$

$$\frac{D}{4} = m^2 + m \leq 0$$

$$m(m + 1) \leq 0, -1 \leq m \leq 0$$

$$\therefore a + b = (-1) + 0 = -1$$

9. x 에 관한 이차부등식 $x^2 + ax + 2a - 3 > 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립하도록 상수 a 의 범위를 구하면 $p < a < q$ 이다. 이 때, pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $pq = 12$

해설

$x^2 + ax + 2a - 3 > 0$ 이 항상 성립할 조건은
판별식 이 $D < 0$ 을 만족해야 한다.

$$D = a^2 - 4(2a - 3) < 0$$

$$a^2 - 8a + 12 < 0$$

$$(a - 6)(a - 2) < 0$$

$$2 < a < 6 \quad \therefore p = 2, q = 6$$

$$\therefore pq = 2 \times 6 = 12$$

10. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $(m+2)x^2 - 4x + 2m < 0$ 이 성립하도록 하는 정수 m 의 최댓값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

(i) $m = -2$ 일 때, $-4x - 4 < 0$ 이므로
모든 실수 x 에 대하여 성립하지는 않는다.

(ii) $m \neq -2$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여
주어진 부등식이 성립하려면 $m + 2 < 0$

$$\therefore m < -2 \quad \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

또, $(m+2)x^2 - 4x + 2m = 0$ 의 판별식을

$$D \text{라 할 때 } \frac{D}{4} = (-2)^2 - 2m(m+2) < 0$$

$$4 - 2m^2 - 4m < 0, \quad m^2 + 2m - 2 > 0$$

$$\therefore m < -1 - \sqrt{3} \text{ 또는 } m > -1 + \sqrt{3} \quad \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}} \text{에서 } m < -1 - \sqrt{3}$$

(i), (ii)에서 $m < -1 - \sqrt{3}$ 이므로

정수 m 의 최댓값은 -3이다.

11. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $(k-2)x^2 + 2(k-2)x + 1 > 0$ 이 성립할 때, 실수 k 값의 범위가 $m \leq k < n$ 이다. $m+n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m+n=5$

해설

① $k=2$ 일 때 $1 > 0$ $\therefore$ 성립한다.

②  아래로 볼록 $(k-2) > 0, k > 2$

③ $\frac{D}{4} < 0$ 에서 $(k-2)^2 - (k-2) < 0$

$(k-2)(k-3) < 0, 2 < k < 3$

①을 만족하거나 ②와 ③을 동시에 만족해야 하므로 $2 \leq k < 3$

$\therefore m=2, n=3, m+n=5$

12. 부등식 $ax^2 + 5x + b > 0$ 을 풀어서 $2 < x < 3$ 이라는 해가 구해졌다.

이 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = 6$

해설

$$ax^2 + 5x + b > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

해가 $2 < x < 3$ 이 되는 이차부등식은

$$(x - 2)(x - 3) < 0 \text{ 전개하면}$$

$$x^2 - 5x + 6 < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠과 일차항의 계수를 맞추기 위해

양변에 -1 을 곱하면

$$-x^2 + 5x - 6 > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉢이 일치해야 하므로 $a = -1$, $b = -6$

13. x 에 대한 이차부등식 $x^2 + ax + b > 0$ 의 해가 $x < 1$ 또는 $x > 4$ 일 때 상수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 + ax + b > 0$ 의 해가 $x < 1$ 또는 $x > 4$ 이라면
 $(x - 1)(x - 4) > 0$ 에서 $x^2 - 5x + 4 > 0$ 이므로
 $a = -5, b = 4$ 따라서 $a + b = -1$

14. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 2일 때, 방정식 $f(2x-3) = 0$ 의 두 근의 합은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = 2$

$f(2x-3) = 0$ 에서 $2x-3 = \alpha, 2x-3 = \beta$

$\therefore x = \frac{\alpha+3}{2}, \frac{\beta+3}{2}$

$\therefore$ 두 근의 합은 $\frac{(\alpha+\beta)+6}{2} = 4$

15. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 10 일 때, 방정식 $f(4x - 3) = 0$ 의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = 10$

$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ 로 놓으면

$f(4x - 3) = a(4x - 3 - \alpha)(4x - 3 - \beta) = 0$

$x = \frac{3 + \alpha}{4}, \frac{3 + \beta}{4}$

$\therefore$ 두 근의 합은 $\frac{6 + \alpha + \beta}{4} = 4$

16. x 의 이차방정식 $mx^2 + 2(1 - 2m)x + m = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 m 의 범위를 구하면?

① $0 < m < \frac{1}{3}$

② $m < \frac{1}{3}, m > 1$

③ $m < 0, 0 < m < \frac{1}{3}, m > 1$

④ $m < 0, m > 1$

⑤ $\frac{1}{3} < m < 1$

해설

이차방정식이므로 $m \neq 0 \dots \textcircled{1}$

$\frac{D}{4} = (1 - 2m)^2 - m^2 > 0$ 에서

$(m - 1)(3m - 1) > 0, m < \frac{1}{3}, m > 1 \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $m < 0, 0 < m < \frac{1}{3}, m > 1$

17. 양의 실수 a 에 대하여 부등식 $-3 < x + 1 < 6$ 의 모든 해가 부등식 $|x - 2| < a$ 를 만족할 때, a 값의 범위는?

① $0 < a \leq 3$

② $0 < a < 3$

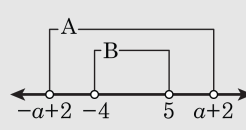
③ $0 \leq a \leq 3$

④ $a \geq 3$

⑤ $a \geq 6$

해설

$\therefore a \geq 6$



18. 둘레의 길이가 24 cm 인 직사각형의 넓이를 35 cm^2 이상 되도록 할 때, 그 한 변의 길이 a 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9 cm ② 10 cm ③ 12 cm ④ 15 cm ⑤ 19 cm

해설

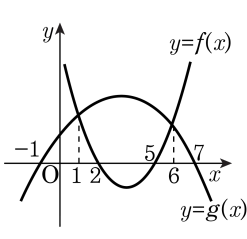
한 변의 길이가 a 이므로 다른 한 변의 길이는 $12 - a$ 이다.

$a(12 - a) \geq 35$ 에서 $(a - 5)(a - 7) \leq 0$

$\therefore 5 \leq a \leq 7$

따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 12 cm

19. 두 이차함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 다음의 그림과 같을 때, 부등식 $0 < g(x) < f(x)$ 의 해는 $a < x < b$ 또는 $c < x < d$ 이다. 이 때, $a + b + c + d$ 의 값은?



- ① 14 ② 13 ③ 12
④ 11 ⑤ 10

해설

$0 < g(x) < f(x)$ 에서 $g(x) > 0$ 이고 $g(x) < f(x)$
 (i) $g(x) > 0$ 을 만족하는 x 의 값의 범위는 $-1 < x < 7$
 (ii) $g(x) < f(x)$ 를 만족하는 x 의 값의 범위는 $x < 1$ 또는 $x > 6$
 따라서, (i)과 (ii)를 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는 $-1 < x < 1$ 또는 $6 < x < 7$
 즉, $a = -1$, $b = 1$, $c = 6$, $d = 7$ 이므로 $a + b + c + d = 13$

20. 부등식 $ax^2 - 2ax + 1 \leq 0$ 이 단 하나의 해를 갖도록 하는 실수 a 의 값을 구하여라.

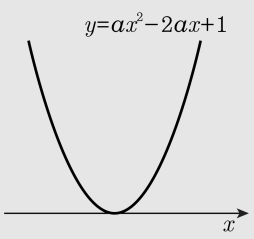
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 부등식이 단 하나의 해를 가지려면
 $y = ax^2 - 2ax + 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.

$y=ax^2-2ax+1$



(i) 그래프가 아래로 볼록이므로 $a > 0$
(ii) $ax^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = a^2 - a = 0$ 에서 $a = 0$ 또는 $a = 1$
(i), (ii)에서 $a = 1$

21. 이차함수 $y = x^2 - 4ax + 1$ 의 그래프가 직선 $y = 2x - a$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있도록 하는 상수 a 의 범위를 구하면?

① $a > 0$

② $-\frac{1}{4} < a < 0$

③ $-\frac{1}{4} < a < \frac{3}{4}$

④ $-\frac{3}{4} < a < \frac{1}{4}$

⑤ $-\frac{3}{4} < a < 0$

해설

$$\begin{cases} y = x^2 - 4ax + 1 \\ y = 2x - a \end{cases}$$

근이 존재하지 않아야 하므로

$$2x - a = x^2 - 4ax + 1$$

$$x^2 + (-4a - 2)x + (a + 1) = 0$$

$$D < 0 : (2a + 1)^2 - (a + 1) < 0$$

$$4a^2 + 3a = a(4a + 3) < 0$$

$$\therefore -\frac{3}{4} < a < 0$$

22. 좌표 평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx + 1)$ 이 곡선 $y = -(x - 2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 않는 것은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 0
- ⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여 부등식
 $2(kx + 1) > -(x - 2)^2 + 1 \cdots \textcircled{1}$ 이
항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
 $\textcircled{1}$ 식을 정리하면
 $x^2 + 2(k - 2)x + 5 > 0 \cdots \textcircled{2}$ 식이
항상 성립하기 위하여
 $\frac{D}{4} = (k - 2)^2 - 5 < 0$
 $\Rightarrow k^2 - 4k - 1 < 0$
 $\therefore 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$
이때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
-1 은 속하지 않는다.

23. $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, x 에 대한 부등식 $x^2 - 6x \geq a^2 - 6a$ 가 항상 성립하기 위한 a 의 값의 범위는?

① $-4 \leq a \leq 0$

② $-2 \leq a \leq 2$

③ $0 \leq a \leq 4$

④ $2 \leq a \leq 4$

⑤ $4 \leq a \leq 6$

해설

$f(x) = x^2 - 6x - a^2 + 6a$ 라 놓고

$-2 \leq x \leq 2$ 에서

$f(x) > 0$ 일 때, a 의 값의 범위를 구한다.

$f(x) = (x-3)^2 - a^2 + 6a - 9$ 이므로

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $x = 2$ 일 때,

$f(2) = 4 - 12 - a^2 + 6a \geq 0$

$a^2 - 6a + 8 \leq 0 \Rightarrow (a-2)(a-4) \leq 0$

$\therefore 2 \leq a \leq 4$

24. 부등식 $(x-2)(ax-1) < 0$ 의 해에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

- ㉠ 이 부등식의 해가 존재하지 않는 실수 a 가 있다.
- ㉡ $a = 0$ 이면 이 부등식의 해는 $x < 2$ 이다.
- ㉢ $a < 0$ 이면 이 부등식의 해는 $\frac{1}{a} < x < 2$ 이다.
- ㉣ $a > 0$ 이면 이 부등식의 해는 $x < 2$ 이다.
- ㉤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣ 모두 거짓이다.

해설

- ㉠ $a \neq 0$ 일 때
 $(x-2)(ax-1) = a(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)$ 이므로
 $a = \frac{1}{2}$ 이면 이 부등식의 해는 없다.
- ㉡ $a = 0$ 이면 이 부등식은 $-(x-2) < 0$,
즉 $x-2 > 0$ 이므로 해는 $x > 2$ 이다.
- ㉢ $a < 0$ 이면 이 부등식은 $(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right) > 0$ 이므로
 $x < \frac{1}{a}$ 또는 $x > 2$ 이다.
- ㉣ $a > 0$ 이면 이 부등식은 $(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right) < 0$ 이므로
 $a < \frac{1}{2}$ 일때, $2 < x < \frac{1}{a}$,
 $a > \frac{1}{2}$ 일때 $\frac{1}{a} < x < 2$ 이다.

25. 다음 두 식을 동시에 만족하는 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하면?

$|x^2 - 2x| = y - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$ $y \leq x + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

㉠에서 $y = |x^2 - 2x| + 1$ 이므로
㉡에 대입하면 $|x^2 - 2x| \leq x$
(i) $x^2 - 2x \geq 0$ ($x \leq 0, x \geq 2$) 일 때
 $x^2 - 2x \leq x$
 $\therefore x(x - 3) \leq 0$
 $\therefore 0 \leq x \leq 3$
조건과 공통범위를 구하면 $x = 0, 2 \leq x \leq 3$
(ii) $x^2 - 2x < 0$ ($0 < x < 2$) 일 때
 $-(x^2 - 2x) \leq x$
 $\therefore x(x - 1) \geq 0$
 $\therefore x \leq 0, x \geq 1$
조건과 공통 범위를 구하면 $1 \leq x < 2$
(i), (ii) 에서 정수 x 를 구하면 $x = 0, 1, 2, 3$
 x 의 값을 ㉠에 차례로 대입하면 $y = 1, 2, 1, 4$
구하는 순서쌍 (x, y) 는
 $(0, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4)$
따라서 구하는 개수는 4 개다.

26. 부등식 $[x-1]^2 + 3[x] - 3 < 0$ 의 해는? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

- ① $-2 \leq x < 1$ ② $-2 \leq x < 0$ ③ $-1 \leq x < 1$
④ $-1 \leq x < 0$ ⑤ $0 \leq x < 2$

해설

$x-1=A$ 라 하면 $x=A+1$
 $\therefore [A]^2 + 3[A+1] - 3 = [A]^2 + 3[A] + 3 - 3 < 0$
 $[A]([A]+3) < 0 \quad \therefore -3 < [A] < 0$
 $-2 \leq A < 0 \quad \therefore -2 \leq x-1 < 0$ 이므로
 $-1 \leq x < 1$

27. 부등식 $5 - x > 2|x + 1|$ 의 해와 $ax^2 + bx + 7 > 0$ 의 해가 같도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은 ?

- ① -7 ② -5 ③ 5 ④ 7 ⑤ 0

해설

$5 - x > 2|x + 1|$ 을 풀면
(i) $x \geq -1$ 일 때
 $5 - x > 2x + 2, x < 1 \quad \therefore -1 \leq x < 1$
(ii) $x < -1$ 일 때
 $5 - x > -2x - 2, x > -7 \quad \therefore -7 < x < -1$
(i), (ii)에 따라 $-7 < x < 1$
 $ax^2 + bx + 7 > 0 \Leftrightarrow -7 < x < 1$ 이므로 $a < 0$ 이고
 $ax^2 + bx + 7 = a(x + 7)(x - 1)$
계수를 비교하면
 $a = -1, b = -6 \quad \therefore a + b = -7$

28. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 실근을 α, β ($\alpha < \beta$)라 하고, 부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 의 모든 해가 $\sqrt{2} \leq x < 3$ 의 범위 안에 있을 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

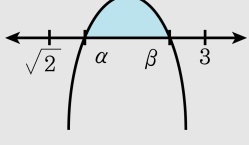
보기

- ㉠ $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$
- ㉡ $ac > 0$
- ㉢ $4a + c < 2b$

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉠, ㉡
- ④ ㉠, ㉡, ㉢
- ⑤ ㉡, ㉢

해설

주어진 조건이 성립하려면 다음 그림과 같이 $a < 0$, $\sqrt{2} \leq \alpha < \beta < 3$ 을 만족하여야 한다.



- ㉠ $\sqrt{2} \leq \alpha < \beta$ 에서 $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$
- ㉡ $a\beta = \frac{c}{a} > 0$ 이므로 $ac > 0$ 이다.
- ㉢ $f(-2) = 4a - 2b + c < 0$ 에서 $4a + c < 2b$

29. 어느 회사가 판매하고 있는 상품의 1개당 판매 가격을 작년보다 $x\%$ 올리면 이 상품의 판매량이 작년보다 $\frac{x}{2}\%$ 감소한다고 한다. 이 회사가 올해 판매 금액의 10% 를 상여금으로 지급할 때, 올해 판매 금액에서 상여금을 제외한 금액이 작년 판매 금액보다 크거나 같게 되기 위한 x 의 최댓값은?

- ① 60
- ② $\frac{200}{3}$
- ③ $\frac{230}{3}$
- ④ 80
- ⑤ 90

해설

이 회사가 판매하는 상품의 작년 1개당 판매 가격을 a , 판매량을 b 라 하자.
올해 판매 가격을 $x\%$ 올리면
올해 판매 가격은 $a\left(1 + \frac{x}{100}\right)$,
판매량은 $b\left(1 - \frac{x}{200}\right)$ 이므로
올해 판매 금액에서 상여금을 제외한 금액은
 $a\left(1 + \frac{x}{100}\right) \times b\left(1 - \frac{x}{200}\right) \times \frac{9}{10}$
작년 판매 금액이 ab 이므로
 $a\left(1 + \frac{x}{100}\right) \times b\left(1 - \frac{x}{200}\right) \times \frac{9}{10} \geq ab$
이 부등식을 정리하면
 $9x^2 - 900x + 20000 \leq 0$
 $(3x - 100)(3x - 200) \leq 0$
 $\therefore \frac{100}{3} \leq x \leq \frac{200}{3}$

30. $|p| < 2$ 를 만족하는 모든 실수 p 에 대하여 부등식 $x^2 + px + 1 > 2x + p$ 가 성립하도록 하는 x 의 값의 범위는?

- ① $x \leq -3, x = -1, x \geq 1$
- ② $x \leq -1, x = 1, x \geq 3$
- ③ $x \leq -3, x \geq 1$
- ④ $x \leq -1, x \geq 3$
- ⑤ $-3 \leq x \leq -1$

해설

$x^2 + px + 1 > 2x + p, (x - 1)p + x^2 - 2x + 1 > 0$

$f(p) = (x - 1)p + x^2 - 2x + 1$ 이라 하면

$-2 < p < 2$ 에서 $f(p) > 0$ 이기 위한 조건은

$f(-2) \geq 0$ 이고 $f(2) \geq 0$ 이어야 한다.

$f(-2) \geq 0$ 에서 $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

$\therefore (x - 1)(x - 3) \geq 0$

$\therefore x \leq 1, x \geq 3 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

$f(2) \geq 0$ 에서 $x^2 - 1 \geq 0$

$\therefore (x + 1)(x - 1) \geq 0$

$\therefore x \leq -1, x \geq 1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$

$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 에서 $\therefore x \leq -1, x = 1, x \geq 3$

그런데 $x = 1$ 일 때,

$f(p) = 0 \cdot p + 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$ 이므로

주어진 조건을 만족하지 않는다.

따라서 구하는 x 값의 범위는 $x \leq -1, x \geq 3$

31. 부등식 $\frac{1}{3} \leq \frac{x^2 - ax + a^2}{x^2 + x + 1} \leq 3$ 이 x 의 값에 관계없이 성립하기 위한 실수 a 의 값의 범위를 D 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $\{a \mid -1 < a < 1\} \subset D$
- ② $\{a \mid a = -1, 1\} \subset D$
- ③ $\left\{a \mid -\frac{3}{5} \leq a \leq 1\right\} \subset D$
- ④ $\left\{a \mid a \leq -\frac{3}{5}\right\} \subset D$
- ⑤ $\{a \mid a > 1\} \subset D$

해설

$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ 이므로
 $3(x^2 + x + 1)$ 을 주어진 부등식에 곱하면
 $x^2 + x + 1 \leq 3(x^2 - ax + a^2) \leq 9(x^2 + x + 1)$
정리하면, $2x^2 - (3a + 1)x + 3a^2 - 1 \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{\tiny \text{㉠}}$
 $2x^2 + (a + 3)x + 3 - a^2 \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{\tiny \text{㉡}}$
모든 x 에 대하여 $\textcircled{\tiny \text{㉠}}$ 이 성립하려면
 $D = (3a + 1)^2 - 8(3a^2 - 1) \leq 0,$
 $(5a + 3)(a - 1) \geq 0$
 $\therefore a \leq -\frac{3}{5}, a \geq 1 \cdots \cdots \textcircled{\tiny \text{㉢}}$
모든 x 에 대하여 $\textcircled{\tiny \text{㉡}}$ 이 성립하려면
 $D = (a + 3)^2 - 8(3 - a^2) \leq 0,$
 $(3a + 5)(a - 1) \leq 0$
 $\therefore -\frac{5}{3} \leq a \leq 1 \cdots \cdots \textcircled{\tiny \text{㉣}}$
 $\textcircled{\tiny \text{㉢}}, \textcircled{\tiny \text{㉣}}$ 의 공통범위를 구하면
 $-\frac{5}{3} \leq a \leq -\frac{3}{5}, a = 1$

32. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + ax + a^2 - 2a = 0$ 이 실수 해 α, β 를 가질 때 $\alpha\beta$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하면 $M+m$ 은 ?

- ① $\frac{8}{9}$ ② $\frac{10}{9}$ ③ $\frac{7}{9}$ ④ $\frac{6}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

해설

준 방정식의 판별식

$$D = a^2 - 4(a^2 - 2a) \geq 0 \quad (\because \text{실수해를 가지므로})$$

$$a^2 - 4a^2 + 8a \geq 0, \quad -3a^2 + 8a \geq 0$$

$$3a^2 - 8a \leq 0, \quad a(3a - 8) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq \frac{8}{3}$$

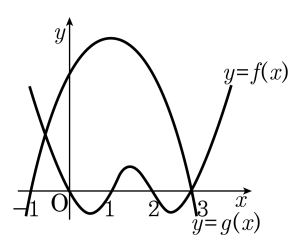
또, 근과 계수와의 관계에서

$$\alpha\beta = a^2 - 2a = (a - 1)^2 - 1$$

$$\therefore \alpha\beta \text{의 최솟값은 } a = 1 \text{ 일 때, } -1, \text{ 최댓값은 } a = \frac{8}{3} \text{ 일 때, } \frac{16}{9}$$

$$\therefore m + n = \frac{16}{9} - \frac{9}{9} = \frac{7}{9}$$

33. 사차함수 $f(x)$ 와 이차함수 $g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) \cdot g(x) > 0$ 의 해는?



- ① $x < -1$ 또는 $x > 3$
- ② $0 < x < 1$ 또는 $2 < x < 3$
- ③ $-1 < x < 0$ 또는 $1 < x < 2$
- ④ $x < 0$ 또는 $1 < x < 2$
- ⑤ $0 < x < 1$ 또는 $x > 3$

해설

$f(x) \cdot g(x) > 0$ 이므로
 $f(x) > 0$ 이고 $g(x) > 0$ 또는
 $f(x) < 0$ 이고 $g(x) < 0$ 이므로
 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프가
 모두 x 축 보다 위에 있거나 모두 x 축 보다
 아래에 있을 때이다.
 따라서 $-1 < x < 0$ 과 $1 < x < 2$ 에서
 두 그래프가 모두 x 축 보다 위에 있다.