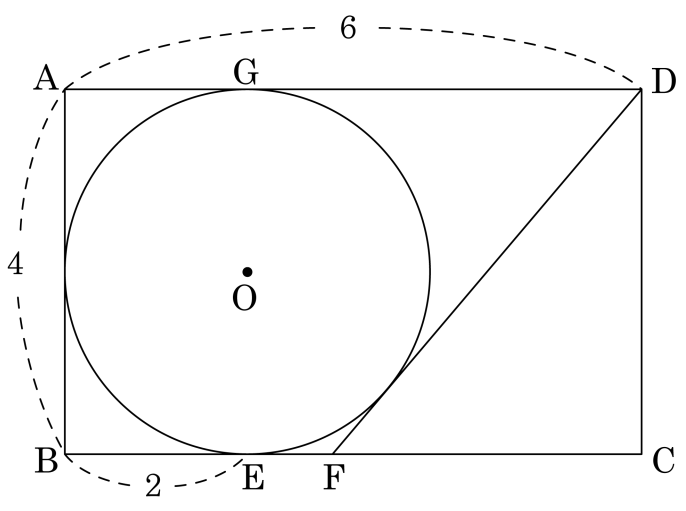
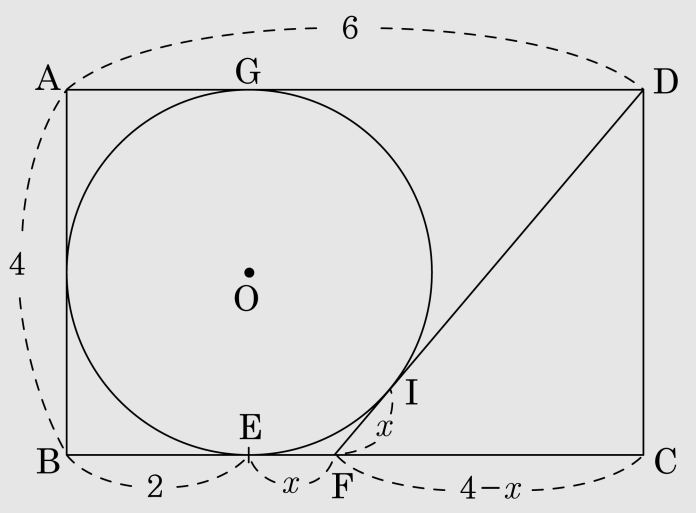
1. 다음 그림과 같이 직사각형 ABCD 의 세 변에 접하는 원 O 가 있다. $\overline{DF}$ 가 원 O 의 접선일 때, $\overline{EF}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설



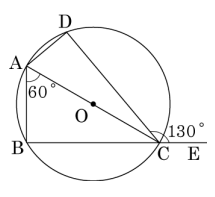
$\overline{BE} = 2$ 이므로 $\overline{AG} = 2$, $\overline{DI} = 4$

$\overline{FI} = \overline{EF} = x$ 로 놓으면 $\overline{CF} = 4 - x$

$\therefore (4 + x)^2 = 4^2 + (4 - x)^2$, $16x = 16$, $x = 1$

따라서 $\overline{EF} = 1$

2. 다음 그림에서 $\overline{AC}$ 는 원 O 의 지름이고, $\angle BAC = 60°$, $\angle DCE = 130°$ 일 때, $\angle ABD$ 의 크기를 구하면?



① 10° ② 15° ③ 20° ④ 25° ⑤ 30°

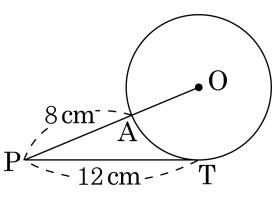
해설

$\angle DCE = \angle DAB = 130°$

$\angle DAO = 130° - 60° = 70° = \angle DBC$

$\therefore \angle ABD = 90° - 70° = 20°$

3. 다음 그림에서 $\overline{PT}$ 는 원 O 의 접선이고 점 T 는 접점이다. $\overline{PA} = 8\,\text{cm}, \overline{PT} = 12\,\text{cm}$ 일 때, 이 원의 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 : _____ cm

▷ 정답 : 5 cm

해설

반지름의 길이를 $x\,\text{cm}$ 라고 하면

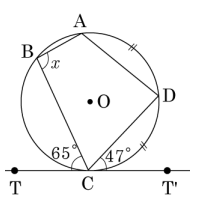
$12^2 = 8(8 + 2x)$

$144 = 64 + 16x$

$16x = 80$

$\therefore x = 5(\text{cm})$

4. 다음 □ABCD 는 원 O 에 내접하고 직선 TT′ 은 점 C 에서 원 O 에 접한다.
5.0pt$\overset{\frown}{CD}$ = 5.0pt$\overset{\frown}{AD}$, ∠DCT′ = 47°, ∠BCT = 65° 일 때, ∠x 의 크기를 구하여라.

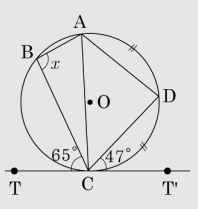


▶ 답 : _____ °

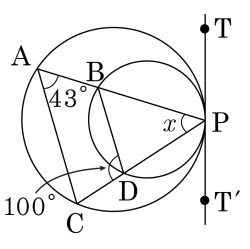
▷ 정답 : 94°

해설

그림과 같이 점 A 와 점 C 를 연결하면
∠CAD = 47°, ∠ACD = 47°, ∠ADC = 180° − (47° × 2) = 86°
∴ ∠x = 180° − 86° = 94°



5. 다음 그림에서 직선 TT′ 는 두 원의 공통인 접선이다. $\angle PAC = 43°$, $\angle BDC = 100°$ 일 때, $\angle x$ 의 크기를 구하여라.



▶ 답 : _____ °

▷ 정답 : 57 °

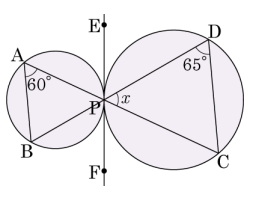
해설

$\angle PBD = \angle CPT' = \angle PAC = 43°$ 이므로 $\triangle BDP$ 에서

$\angle PBD + \angle x = 43° + \angle x = 100°$

$\therefore\ \angle x = 57°$

6. 다음 그림에서 $\angle BAP = 60°$, $\angle CDP = 65°$ 이고 직선 EF 는 두 원의 공통접선이다. $\angle DPC$ 의 크기는? (단, P 는 공통접점이다.)

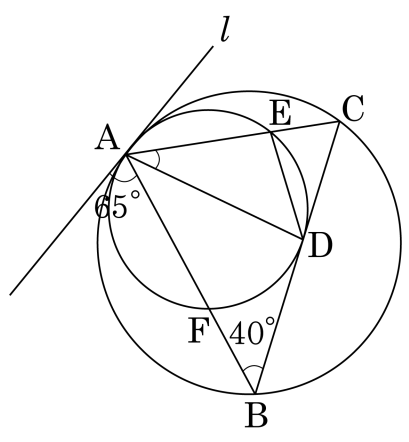


① 55° ② 53° ③ 51° ④ 49° ⑤ 47°

해설

$\angle A = \angle BPF = 60°$ (접현각)
$\angle D = \angle CPF = 65°$ (접현각)
$\therefore \angle BPF + \angle CPF + \angle CPD = 180°$
$60° + 65° + x = 180°$
$\therefore x = 55°$

7. 다음 그림에서 직선 l 은 점 A 에서 두 원과 접하고 큰 원의 현 BC 는 점 D 에서 작은 원에 접할 때, $\angle DAC$ 의 크기를 구하여라.

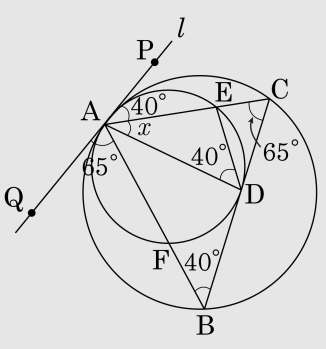


▶ 답 : _____ °

▷ 정답 : 37.5 °

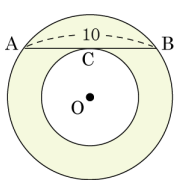
해설

직선 l 위의 두 점을 P, Q 라 하고, $\angle DAC = \angle x$ 라 하면
$\angle ABC = \angle PAC = \angle ADE = 40°$, $\angle ACB = \angle QAB = 65°$



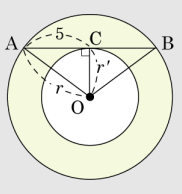
$\triangle ADE$ 에서 $\angle DEC = \angle x + 40°$
$\overline{BC}$ 는 작은 원의 접선이므로 $\angle EDC = \angle EAD = \angle x$ 이다.
$\triangle EDC$ 에서 $\angle x + 40° + \angle x + 65° = 180°$ 이다.
$\therefore \angle x = 37.5°$

8. 다음 그림과 같이 두 개의 동심원이 있다. 큰 원의 현 AB 가 작은 원에 접하고, $\overline{AB} = 10$ 일 때, 색칠한 부분의 넓이는?



① 10π ② 15π ③ 20π ④ 25π ⑤ 30π

해설



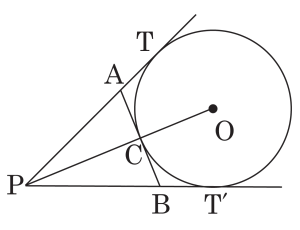
큰 원의 반지름의 길이를 r , 작은 원의 반지름의 길이를 r' 라고 하자.

$\overline{AB}$ 는 작은 원의 접선이므로 $\overline{OC} \perp \overline{AB}$, $\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 5$ 이다.

직각삼각형 $\triangle ACO$ 에서 $r^2 - r'^2 = 5^2$ 이다.

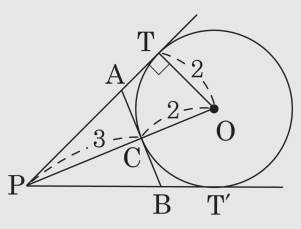
색칠한 부분의 넓이$= \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi(r^2 - r'^2) = 25\pi$ 이다.

9. 다음 그림에서 원 O 는 $\overline{AB}$ 와 점 C 에서 접하고, $\overline{PA}$ 와 $\overline{PB}$ 의 연장선과 두 점 T, T′ 에서 각각 접한다. $\overline{PC} = 3\text{cm}$, $\overline{CO} = 2\text{cm}$ 일 때, $\overline{PT} + \overline{PT'}$ 의 값은?



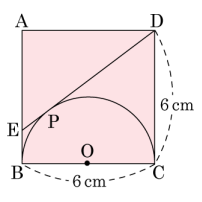
① $\frac{\sqrt{21}}{2}\text{cm}$　② $\sqrt{21}\text{cm}$　③ $2\sqrt{21}\text{cm}$
④ $\sqrt{29}\text{cm}$　⑤ $2\sqrt{29}\text{cm}$

해설



$\triangle POT$ 에서 $\overline{OP} = 5\text{cm}, \overline{OT} = 2\text{cm}$ 이므로
$\overline{PT} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}\text{cm}$
$\overline{PT} = \overline{PT'}$　$\therefore \overline{PT} + \overline{PT'} = \sqrt{21} \times 2 = 2\sqrt{21}\text{cm}$

10. 다음 그림에서 □ABCD 는 한 변의 길이가 6cm 인 정사각형이다. $\overline{DE}$ 가 $\overline{BC}$ 를 지름으로 하는 원에 접할 때, $\overline{AE}$ 의 길이는?



① $\frac{9}{2}$cm ② $\frac{25}{2}$cm ③ 13cm
④ $\frac{27}{2}$cm ⑤ $\frac{15}{4}$cm

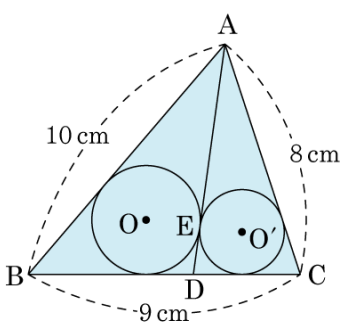
해설

$\overline{EP} = \overline{EB} = x$
$\overline{AE} = 6 - x$

△AED 에서
$\overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{DA}^2$
$(x+6)^2 = (6-x)^2 + 6^2$
$24x = 36$
$x = \frac{3}{2}$ cm

따라서 $\overline{AE} = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$(cm)

11. 그림과 같이 $\overline{AB} = 10\,cm, \overline{BC} = 9\,cm, \overline{AC} = 8\,cm$ 인 $\triangle ABD$, $\triangle ADC$ 의 내접원을 그리면 이 두 원이 한 점 E 에서 접할 때, $\overline{AE} - \overline{ED}$ 의 길이는?



① 2 cm ② 2.3 cm

③ 3.8 cm ④ 4 cm

⑤ 4.5 cm

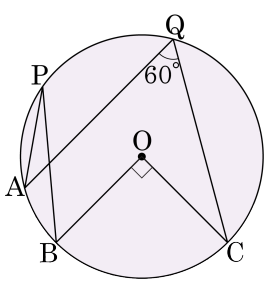
해설

$10 - \overline{AE} + 8 - \overline{AE} + 2\overline{ED} = 9$

$18 - 2\overline{AE} + 2\overline{ED} = 9$

$\therefore \overline{AE} - \overline{ED} = \frac{9}{2} = 4.5(\,cm)$

12. 다음 그림의 $\angle BOC = 90°$, $\angle AQC = 60°$ 일 때, $\angle APB$ 의 크기는?

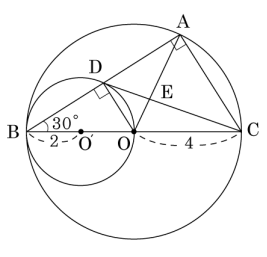


① 15°　② 20°　③ 25°
④ 30°　⑤ 35°

해설

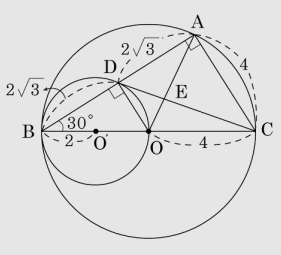
중심 O 와 A 를 이으면 5.0pt$\overset{\frown}{AC}$ 의 원주각이 60° 이므로 중심각 $\angle AOC = 120°$ 이다.
$\angle AOB = 120° - 90° = 30°$
5.0pt$\overset{\frown}{AB}$ 의 중심각 $\angle AOB = 30°$
5.0pt$\overset{\frown}{AB}$ 의 원주각 $\angle APB = 15°$

13. 다음 그림의 원 O 의 지름은 8 , 원 O′ 의 지름은 4 , $\angle ABC = 30°$ 이다. 이때, $\overline{DE}$ 의 길이는?



① $\frac{\sqrt{7}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ③ $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{7}}{2}$

해설

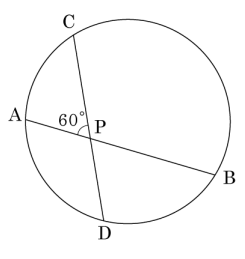


$\overline{AD} = \overline{BD} = 2\sqrt{3}$, $\overline{BO} = \overline{CO} = 4$ 이므로 점 E 는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이다.

$\triangle ACD$ 에서 $\overline{CD} = 2\sqrt{7}$ 이다.

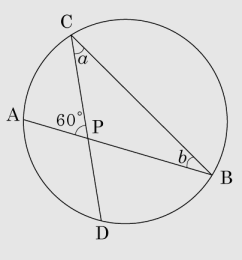
$\therefore \overline{DE} = 2\sqrt{7} \times \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

14. 다음 그림의 원에서 두 현 AB, CD 의 교점을 P 라 하자. $\angle APC = 60^\circ$ 일 때, 5.0pt$\overset{\frown}{AC}$ + 5.0pt$\overset{\frown}{BD}$ 의 길이는 이 원의 둘레의 길이의 몇 배인가?



① $\frac{1}{2}$ 배 ② $\frac{1}{3}$ 배 ③ $\frac{1}{4}$ 배 ④ $\frac{1}{5}$ 배 ⑤ $\frac{1}{8}$ 배

해설

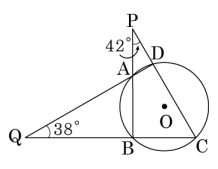


선분 BC 를 긋고, 5.0pt$\overset{\frown}{BD}$ 의 원주각을 a° 5.0pt$\overset{\frown}{AC}$ 의 원주각을 b° 라 하면 $a^\circ + b^\circ = 60^\circ$

5.0pt$\overset{\frown}{AC}$ + 5.0pt$\overset{\frown}{BD}$ 의 원주각의 합이 60° 이므로 그들의 중심각의 합은 120° 이다.

따라서 원의 둘레는 호의 길이에 비례하므로 $120^\circ = 360^\circ \times \frac{1}{3}$ 이다.

15. 다음 그림과 같이 원 O 에 내접하는 □ABCD 에서 $\overline{DA}$ 와 $\overline{CB}$ 의 연장선의 교점을 Q , $\overline{BA}$ 와 $\overline{CD}$ 의 연장선의 교점을 P 라 하자. $\angle P = 42°$, $\angle Q = 38°$ 일 때, $\angle BCD$ 의 크기는?



① 50°　② 52°　③ 54°　④ 56°　⑤ 58°

해설

$\angle BCD = x$ 라고 하면

$\angle CBP = 180° - 42° - x = 138° - x$

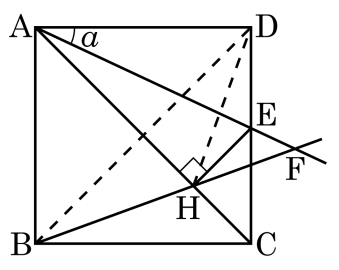
$\angle QDC = 180° - 38° - x = 142° - x$

□ABCD 가 원에 내접하므로

$138° - x + 142° - x = 180° - 2x = -100°$

$\therefore \angle x = 50°$

16. 정사각형 ABCD 의 변 CD 위의 점 E 에서 대각선 AC 에 내린 수선의 발을 H , 두 선분 AE 와 BH 의 연장선이 만나는 점을 F 라고 하고 $\angle DAE = a$ 라고 할 때, $\angle EHF$ 의 크기를 구하여라.



① $5a°$ ② $4a°$ ③ $3a°$ ④ $2a°$ ⑤ $a°$

해설

$\angle AHE = \angle ADE = 90°$ 이므로 네 점 A, H, E, D 는 한 원 위에 있다. 따라서 호 5.0pt$\overset{\frown}{DE}$ 에 대한 원주각은 모두 같으므로, $\angle DAE = \angle DHE = a$ 이다.

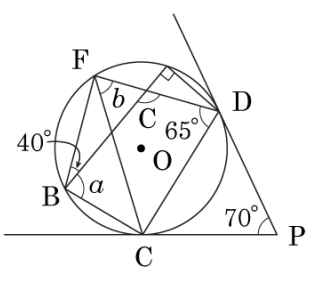
$\overline{BD} // \overline{HE}$ 이므로

$\angle BDC = \angle HEC = 45°$, $\angle DHE = \angle HDB$

또한, $\overline{HD} = \overline{HB}$ 이므로 $\angle HBD = \angle HDB = a$

$\therefore\ \angle EHF = \angle HDB = a$

17. 다음 그림에서 두 반직선은 원 O 의 접선이다. $\angle BAD = 90°, \angle EDC = 65°, \angle EBF = 40°, \angle CPD = 70°$ 일 때, $\angle a + \angle b + \angle c$ 의 크기는?



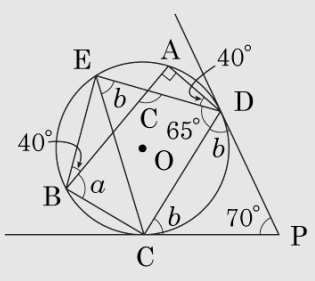
① 240° ② 245° ③ 255° ④ 260° ⑤ 320°

해설

1) 사각형 EBCD 가 원에 내접하므로 $\angle a + 40° + 65° = 180°$ ∴ $\angle a = 75°$

2) 접선과 현이 이루는 각의 크기는 그 내부의 호에 대한 원주각의 크기와 같으므로

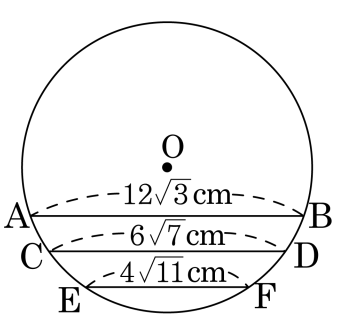
$\angle b = \angle PDC = \angle PCD = 55°$ ($\because \overline{PD} = \overline{PC}$)



3) $\triangle ADE$ 에서 $\angle c = 90° + 40° = 130°$ (이 때, $\widehat{AF}$ 에 대한 원주각으로 $\angle FBA = \angle ADF = 40°$)

따라서, $\angle a + \angle b + \angle c = 75° + 55° + 130° = 260°$ 이다.

18. 다음 그림과 같이 원 O 에 세 개의 현을 그었을 때 원의 중심 O 로부터 세 현까지의 거리의 비가 6 : 9 : 10 이 된다. 세 현의 길이가 각각 $12\sqrt{3}$cm, $6\sqrt{7}$cm, $4\sqrt{11}$cm 일 때, 이 원의 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 : _____ cm

▷ 정답 : 12 cm

해설

원의 중심 O 에서 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ 에 내린 수선의 발을 각각 L, M, N 이라 하면

원의 중심 O 로부터 세 현까지의 거리의 비가 6 : 9 : 10 이므로

$\overline{OL} = 6k$, $\overline{OM} = 9k$, $\overline{EF} = 10k$

원 O 의 반지름의 길이를 r 이라 하고 △OAL, △OCM, △OEN 에서 각각 피타고라스 정리를 이용하면

$r^2 = (6k)^2 + (6\sqrt{3})^2 \cdots$ ①

$r^2 = (9k)^2 + (3\sqrt{7})^2 \cdots$ ②

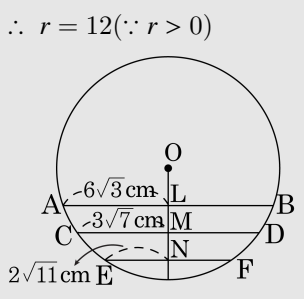
$r^2 = (10k)^2 + (2\sqrt{11})^2 \cdots$ ③

①, ②에 의하여 $36k^2 + 108 = 81k^2 + 63$

$\therefore\ k = 1 (\because k > 0)$

$k = 1$ 을 ①에 대입하면 $r^2 = 144$

$\therefore\ r = 12 (\because r > 0)$



19. 원 O 의 외부의 한 점 P 에서 그 원에 그은 접선과 할선이 원과 만나는 점을 각각 T, A, B 라 할 때, 선분 BT 는 원의 지름이고 $\overline{PA} = 2$, $\overline{PT} = 6$ 일 때, 원 O 의 둘레의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12\sqrt{2}\pi$

해설

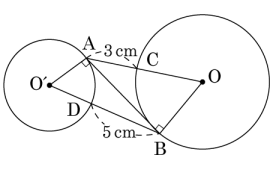
$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}, 36 = 2 \times \overline{PB} \qquad \therefore\ \overline{PB} = 18$

피타고라스 정리에 의하여 원의 지름은

$\overline{BT} = \sqrt{\overline{PB}^2 - \overline{PT}^2} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$

따라서 원 O 의 둘레의 길이는 $12\sqrt{2}\pi$ 이다.

20. 다음 그림과 같이 두 원 O, O′ 의 반지름의 길이의 비는 2 : 1 이고, $\overline{AB}$ 는 두 원의 공통내접선이다. $\overline{AC}$ = 3cm, $\overline{BD}$ = 5cm 일 때, 두 원의 공통내접선의 길이를 구하여라.



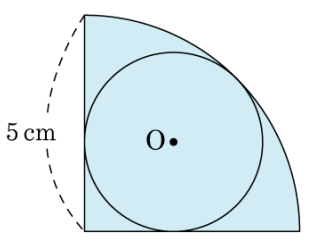
▶ 답 : _____ cm

▷ 정답 : $\sqrt{105}$ cm

해설

두 원 O, O′ 의 반지름의 길이의 비가 2 : 1 이므로
원 O, O′ 의 반지름의 길이를 각각 $2r$, r 이라 하면
△AO′B 에서 $\overline{AB}^2 = (r+5)^2 - r^2 \cdots$ ㉠
△ABO 에서 $\overline{AB}^2 = (2r+3)^2 - (2r)^2 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $r = 8$
따라서 ㉠에서 공통내접선
$\overline{AB} = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{105}$(cm) 이다.

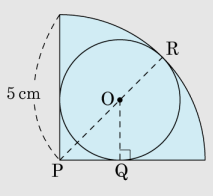
21. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5cm 인 사분원에 내접하는 원 O 가 있다. 원 O 의 반지름의 길이는?



① $(5\sqrt{2}-5)$cm ② $(4\sqrt{2}-5)$cm ③ $(3\sqrt{2}-5)$cm
④ $(2\sqrt{2}-5)$cm ⑤ $(\sqrt{2}-5)$cm

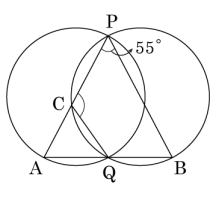
해설

원 O 의 반지름을 x cm 라 한다.
그림과 같이 보조선을 그으면



$\overline{PR} = \overline{PO} + \overline{OR}$
$\sqrt{2}x + x = 5$
$(\sqrt{2}+1)x = 5$
$x = 5(\sqrt{2}-1)$

22. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 같은 두 원이 만나는 점을 P, Q 라 하고 점 Q 를 지나는 직선이 두 원과 만나는 점을 각각 A, B, 원과 $\overline{PA}$ 가 만나는 점을 C 라 하자. $\angle APB = 55°$ 일 때, $\angle PCQ$ 의 크기를 구하여라.



▶ 답 : _____ °

▷ 정답 : 117.5 °

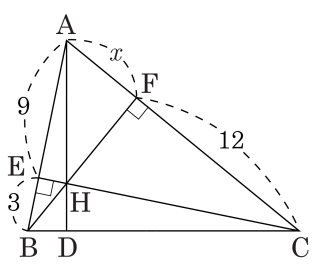
해설

두 점 P, Q 를 지나는 두 호의 길이가 같으므로

$\angle PAQ = \angle PBQ = \frac{1}{2}(180° - 55°) = 62.5°$

$\therefore\ \angle PCQ = 180° - \angle PBQ = 117.5°$

23. 다음 그림에서 x 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

점 E, B, C, F 는 한 원 위에 있고 직선 AB, AC 는 할선이 된다.

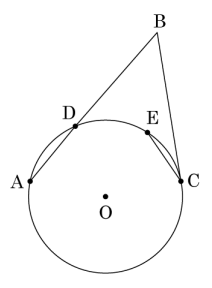
$9 \times 12 = x(x+12)$

$108 = x^2 + 12x, x^2 + 12x - 108 = 0$

$(x+18)(x-6) = 0$

$\therefore x = 6 (\because x > 0)$

24. 다음 그림에서 두 점 D, E 가 호 AC 의 삼등분점이고, $\angle ABC = 50°$, 점 C 는 원 O 의 접점일 때, $\angle ECB$ 의 크기를 구하여라.

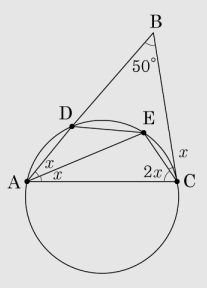


▶ 답 : _____ °

▷ 정답 : 26 °

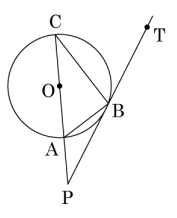
해설

다음 그림과 같이 보조선을 연결한 후



$\angle ECB = x$ 라 하면 접선과 현이 이루는 성질에 의하여 $\angle EAC = x$
또한, 5.0pt$\overset{\frown}{DE}$ = 5.0pt$\overset{\frown}{EC}$ 이므로 $\angle DAE = x$
5.0pt$\overset{\frown}{AE}$ = 25.0pt$\overset{\frown}{EC}$ 이므로 $\angle ACE = 2x$
따라서 삼각형 ABC 의 모든 내각의 합은 180° 이므로 $x + x + 2x + x + 50° = 180°$
$x = 26°$
$\therefore\ \angle ECB = 26°$

25. 다음 그림에서 직선 PT 는 원 O 의 접선이고 $\overline{AC}$ 는 원 O 의 지름이다. $\overline{BP} = \overline{BC}$ 일 때, $\angle CBT$ 의 크기를 구하여라. (단, 점 B 는 접점이다.)

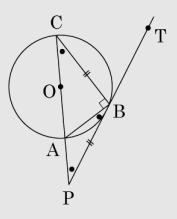


▶ 답 : $\underline{\quad\quad}$ °

▷ 정답 : 60 °

해설

보조선 AB 를 그으면 $\angle CBA = 90°$
$\angle BPC = x$ 라 하면
$\overline{BP} = \overline{BC}$ 이므로 $\angle BCA = \angle BPC = x$



$\overline{PB}$ 가 접선이므로 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의하여
$\angle ABP = \angle BCA = x$
삼각형 ABP 의 외각의 성질에 의하여
$\angle CAB = 2x$
$\overline{PB}$ 가 접선이므로 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의하여
$\angle CBT = \angle CAB = 2x$
$90° + x + 2x = 180°$ $\quad\therefore\ x = 30°$
따라서 $\angle CBT = 2x = 2 \times 30° = 60°$ 이다.