1. 등식 $3x^2+5x=a(x-1)^2+b(x+1)+c$가 x에 관한 항등식이 되도록 하는 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b-c$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 28

해설

우변을 전개하여 계수비교법으로 미정계수를 구한다.

$$\begin{aligned}3x^2+5x&=a(x-1)^2+b(x+1)+c\\&=ax^2+(-2a+b)x+a+b+c\end{aligned}$$

$a=3,\ -2a+b=5,\ a+b+c=0$

$\therefore\ a=3,\ b=11,\ c=-14$

$\therefore\ a+b-c=28$

해설

수치대입법으로 미정계수를 구해도 된다.

양변에 $x=0$을 대입하면

$0=a+b+c\cdots$ ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$8=2b+c\cdots$ ㉡

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-2=4a+c\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하면

$a=3,\ b=11,\ c=-14$

$\therefore\ a+b-c=28$

2. $2012 = k$ 라 할 때, 2013×2011 을 k 로 나타내면?

① $k^2 + k$ ② $k^2 - 1$ ③ $k^2 + k + 1$
④ $k^2 - k + 1$ ⑤ $k^2 - k$

해설

$$\begin{aligned} 2013 \times 2011 &= (k+1)(k-1) \\ &= k^2 - 1 \end{aligned}$$

3. 다음 보기의 복소수 중 실수인 것의 개수는?

보기

$2i$, $1+\sqrt{-4}$, $3+4i$, 9, i^2+1

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$a+bi$ 에서 $b=0$ 인 경우, 즉 허수 부분이 0이면 실수이다.
$2i$ 의 허수 부분은 2, $1+\sqrt{-4}=1+2i$ 에서 허수 부분은 2이고, $3+4i$ 의 허수 부분은 4이다.
9와 $i^2+1=-1+1=0$ 의 허수 부분은 0이다.
따라서 실수인 것은 9와 i^2+1 로 두 개다.

4. 이차방정식 $2x^2 - 2x + 3 = 0$ 의 두 근을 구하면?

① $-1 \pm \sqrt{5}i$　② $1 \pm \sqrt{5}$　③ $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}i}{2}$
④ $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$　⑤ $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}i}{2}$

해설

$2x^2 - 2x + 3 = 0$ 에서

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 2\times3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}i}{2}$$

5. 다음 이차함수 중 최솟값을 갖지 <u>않는</u> 것은?

① $y = 2x^2 + 5$

② $y = 6(x+1)^2$

③ $y = \frac{1}{3}x^2 + 4x + 5$

④ $y = -3(x-2)^2 + \frac{1}{3}$

⑤ $y = 2\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 4$

해설

이차항의 계수가 양수일 때, 최솟값을 갖는다.

6. $3 \le x \le 12,\ 1 \le y \le 3$ 일 때, $x - y$ 의 범위는?

① $4 \le x - y \le 15$
② $-3 \le x - y \le 12$
③ $0 \le x - y \le 11$
④ $3 \le x - y \le 36$
⑤ $3 \le x - y \le 40$

해설

$3 \le x \le 12,\ 1 \le y \le 3$를 $x - y$에 대입하면
$3 - 3 \le x - y \le 12 - 1$

7. 부등식 $|x-2|+|x+3| \geq -2x+9$의 해는?

① $x \geq 2$　　② $-3 \leq x \leq 2$　　③ $1 < x \leq 2$

④ $x < 2$　　⑤ 해가 없다.

해설

(i) $x < -3$일 때,

$-2x-1 \geq -2x+9$, $-1 \geq 9$

따라서 이 범위에서 해가 존재하지 않는다.

(ii) $-3 \leq x < 2$일 때,

$5 \geq -2x+9$

$2x \geq 4$, $x \geq 2$ 따라서 이 범위에서 해가 없다.

(iii) $x \geq 2$일 때,

$2x+1 \geq -2x+9$

$4x \geq 8$, $x \geq 2$ 따라서 이 범위에서의 해는 $x \geq 2$이다.

세 범위의 해를 연립하면 결과는

$\therefore x \geq 2$

8. 두 점 $A(-3, -2)$, $B(1, 1)$로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x+2y+3=0$
② $2x+y+3=0$
③ $4x-6y+15=0$
④ $4x+6y+7=0$
⑤ $8x+6y+11=0$

해설

$P(x, y)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$

즉, $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(x+3)^2+(y+2)^2=(x-1)^2+(y-1)^2$

$\therefore\ 8x+6y+11=0$

9. 원 $x^2+y^2-10x-2y+1=0$의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 반지름의 길이를 r라 할 때, $a+b+r$의 값을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 11

해설
주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면
$(x^2-10x+25)+(y^2-2y+1)=25$
$\therefore (x-5)^2+(y-1)^2=5^2$
따라서 중심의 좌표는 $(a,\ b)=(5,\ 1)$
반지름의 길이는 $r=5$이므로
$a+b+r=5+1+5=11$

10. x에 대한 이차방정식 $(k-1)x^2+2kx+k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 자연수 k의 최솟값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

(i) 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $k-1 \neq 0$이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=k^2-(k-1)^2>0,\ 2k-1>0$

$\therefore k>\frac{1}{2}$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.

11. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=y+1$을 ㉡에 대입하면,

$(y+1)^2+y^2=5$

$y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$

$\therefore\ y=-2$ 또는 $y=1$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $x=-1$

$y=1$을 ㉡에 대입하면 $x=2$

$\therefore\ xy=2$

12. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2+2y^2=12 \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y$에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $3\sqrt{2}$　② 4　③ $-3\sqrt{2}$

④ -4　⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2-3xy+2y^2=0$

$(x-y)(x-2y)$

$\Rightarrow \quad (x-y)(x-2y)=0$

$\Rightarrow \quad x=y$ 또는 $x=2y$

ⅰ) $x=y$

$x^2+2y^2=3x^2=12$

$x=\pm 2 \quad \Rightarrow \quad y=\pm 2$

ⅱ) $x=2y$

$x^2+2y^2=6y^2=12$

$y=\pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x=\pm 2\sqrt{2}$

$x+y=(4,-4,3\sqrt{2},-3\sqrt{2})$

13. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \le 0$의 해를 구하면?

① $x \ge 3$ 또는 $x \le -3$
② x는 모든 실수
③ $x \ne 3$인 모든 실수
④ $x = 3$
⑤ 해가 없다

해설

$x^2 - 6x + 9 \le 0$
$(x-3)^2 \le 0$
$\Rightarrow x = 3$

14. 이차부등식 $ax^2 + 4x + a < 0$이 임의의 실수 x에 대하여 성립할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $a < -2$ ② $a < 0$ ③ $a < 2$
④ $a < 4$ ⑤ $a < 8$

해설

$ax^2 + 4x + a < 0$이 임의의 실수 x에 대하여 성립하려면
ⅰ) $a < 0$
ⅱ) $ax^2 + 4x + a = 0$의 판별식을 D라 할 때,
$\frac{D}{4} = 2^2 - a^2 < 0$
$a^2 - 4 > 0, (a+2)(a-2) > 0$
$\therefore a < -2$ 또는 $a > 2$
ⅰ), ⅱ)의 공통 범위를 구하면 $a < -2$

15. 이차부등식 $x^2 + 2x + a < 0$의 해가 $-4 < x < 2$일 때, a의 값을 구하여라.(단, a는 상수)

▶ 답:

▷ 정답: -8

해설

해가 $-4 < x < 2$ 이므로

$(x+4)(x-2) < 0$

$x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + a$

$\therefore a = -8$

16. 두 부등식 $2x-1>0$, $(x+1)(x-a)<0$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $\frac{1}{2}<x<3$ 이 되도록 하는 정수 a의 값은? (단,$a>1$)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$2x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}$ …… ①

$(x+1)(x-a)<0$

$\therefore -1<x<a$ …… ②

즉 ①, ②의 공통 부분이 $\frac{1}{2}<x<3$ 이므로

$\therefore a=3$

17. 포물선 $y = x^2 - 3x - 2$을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은?

① $y = x^2 + 3x - 2$
② $y = x^2 - 3x + 2$
③ $y = -x^2 - 3x - 2$
④ $y = -x^2 + 3x - 2$
⑤ $y = -x^2 + 3x + 2$

해설

x축대칭은 $y \to -y$를 대입하면 된다.

18. x에 대한 방정식 $ix^2+(1+i)x+1=0$의 해를 구하여라. (단, $x \neq i$)

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

양변에 $-i$를 곱하면

$(-i)\cdot ix^2-i(1+i)x-i=0$

$x^2+(1-i)x-i=0$

$(x-i)(x+1)=0$

$x \neq i$이므로 $x=-1$

19. 방정식 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때
$x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x+1)(x-3) = 0$
$x = -1$ 또는 $x = 3$
그런데 $x \geq 0$이므로 $x = 3$
ⅱ) $x < 0$일 때
$x^2 + 2x - 3 = 0$, $(x-1)(x+3) = 0$
$x = 1$ 또는 $x = -3$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -3$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$
따라서 근의 합은 0이다.

20. 부등식 $(a-b)x+(b-2a)>0$의 해가 $x>\frac{3}{2}$일 때, 부등식 $ax^2+(a+2b)x+(a+3b)<0$의 해를 구하면?

① $3<x<7$　② $-3<x<1$　③ $x<2,\ x>3$
④ $-1<x<2$　⑤ $x<-2,\ x>4$

해설

$(a-b)x>2a-b$의 해가 $x>\frac{3}{2}$이려면

$a-b>0,\ \frac{2a-b}{a-b}=\frac{3}{2}$이어야 한다.

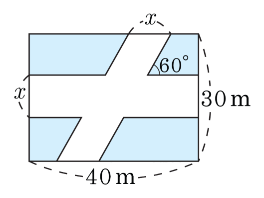
$\therefore\ a=-b,\ \ b<0$

준 부등식 $-bx^2+bx+2b<0$에서

$x^2-x-2<0,\ (x-2)(x+1)<0$

$\therefore\ -1<x<2$

21. 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 40 m, 30 m 인 직사각형꼴의 땅에 같은 폭의 두 도로를 60°로 교차하도록 만들었다. 이때, 남은 땅의 넓이가 600 m^2 이상이 되도록 할 때, 도로 폭의 최대 길이는?



① 4m ② 6m ③ 8m ④ 10m ⑤ 12m

해설

남은 땅의 넓이를 S 라 하면
$S = 40 \times 30 - (40x + 30x - x^2) \geq 600$
$\therefore\ x^2 - 70x + 600 \geq 0$
$(x-10)(x-60) \geq 0$에서 $x \leq 10$ 또는
$x \geq 60\ (0 < x < 30)$이 된다.
그러므로 도로폭의 최대 길이는
$0 < x \leq 10$ 이므로 10 m이다.

22. 이차함수 $y = x^2 + x + 1$ 의 그래프가 함수 $y = kx^2 + kx - 1$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 존재하도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-5 \leq k < 1$　② $-2 < k \leq 3$　③ $-7 < k \leq 1$

④ $1 < k \leq 5$　⑤ $1 \leq k < 7$

해설

$x^2 + x + 1 > kx^2 + kx - 1$ 에서

$(k-1)x^2 + (k-1)x - 2 < 0$

(i) $k - 1 = 0$, 즉 $k = 1$ 일 때

$-2 < 0$ 이므로 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $k - 1 \neq 0$, 즉 $k \neq 1$ 일 때

주어진 부등식이 항상 성립하려면 $k - 1 < 0$

$\therefore k < 1 \cdots$ ㉠

한편, 이차방정식 $(k-1)x^2 + (k-1)x - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = (k-1)^2 + 8(k-1) < 0$ 에서

$(k+7)(k-1) < 0$

$\therefore -7 < k < 1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $-7 < k < 1$

(i), (ii) 에서 $-7 < k \leq 1$

23. 이차방정식 $x^2-2mx+m+6=0$의 두 근이 모두 1보다 작을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하면?

① $m \le -6$　　② $m \le -4$　　③ $m \le -2$

④ $m \le 0$　　⑤ $m \le 2$

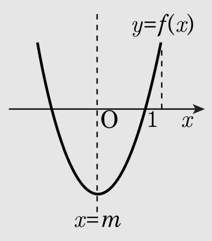
해설

$f(x)=x^2-2mx+m+6=(x-m)^2-m^2+m+6$으로 놓으면

$\frac{D}{4}=m^2-1\cdot(m+6)=m^2-m-6$

$f(1)=1-2m+m+6=-m+7$

두 근이 모두 1보다 작으려면 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



따라서,

(ⅰ) 판별식 : $\frac{D}{4}=m^2-m-6 \ge 0$

$(m+2)(m-3) \ge 0$

$\therefore m \le -2$ 또는 $m \ge 3$ $\cdots\cdots$ ㉠

(ⅱ) 경계값의 부호 : $f(1)=-m+7>0$

$\therefore m<7$ $\cdots\cdots$ ㉡

(ⅲ) 축 : $m<1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢으로부터 구하는 m의 값의 범위는 $m \le -2$

24. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때, ab의 값은?

$x^3+x^2-5x+3=0,\ x^3+2x^2+ax+b=0, x^2+bx+a=0$

① -1　　② 3　　③ $-\frac{9}{4}$　　④ $\frac{9}{16}$　　⑤ $-\frac{81}{16}$

해설

$x^3+x^2-5x+3=0$의 좌변을 인수분해하면 $(x-1)^2(x+3)=0$ $\therefore\ x=1$ 또는 $x=-3$

(i) 공통근이 $x=1$인 경우 나머지 두 방정식에 $x=1$을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는 $a,\ b$값은 없다.

(ii) 공통근이 $x=-3$인 경우 다른 두 방정식은 $x=-3$을 근으로 하므로 $\{-27+18-3a+b=0\}$ $\cdots\cdots$㉠

$\{9-3b+a=0\}\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면 $a=-\frac{9}{4},\ b=\frac{9}{4},\ ab=-\frac{81}{16}$

25. 연립부등식 $\begin{cases} 5x - a < 11 \\ x - b < 3(x - 3) \end{cases}$ 의 해가 $1 < x < 3$이다. $-ax + b \geq 0$을 만족하는 정수 중 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$5x < a + 11,\ x < \dfrac{a + 11}{5}$

$x - b < 3x - 9,\ 9 - b < 2x,\ \dfrac{9 - b}{2} < x$

$\dfrac{a + 11}{5} = 3 \qquad \therefore\ a = 4$

$\dfrac{9 - b}{2} = 1 \qquad \therefore\ b = 7$

$a = 4,\ b = 7$을 $-ax + b \geq 0$에 대입하여 정리하면

$-4x + 7 \geq 0$

$x \leq \dfrac{7}{4}$이므로 만족하는 정수 중 최댓값은 1이다.