1. 다음 중 집합이 아닌 것은?

① 5 보다 크고 6 보다 작은 자연수의 모임
② 몸무게가 60kg 이상인 사람들의 모임
③ 40 에 가까운 수의 모임
④ 우리 반에서 키가 가장 작은 학생의 모임
⑤ 반올림하여 50 이 되는 자연수들의 모임

해설
'가까운' 은 그 대상이 분명하지 않으므로 집합이 아니다.

2. 자연수를 원소로 하는 집합 A가 「$x \in A$ 이면 $5 - x \in A$이다.」를 만족한다. 이러한 성질을 만족하는 집합 A의 개수는?

① 3 개　② 4 개　③ 5 개　④ 6 개　⑤ 7 개

해설

x 와 $5 - x$가 자연수이므로 $x \geq 1$, $5 - x \geq 1$ $\therefore$ $1 \leq x \leq 4$

㉠ $1 \in A$이면 $5 - 1 = 4 \in A$

㉡ $2 \in A$이면 $5 - 2 = 3 \in A$이므로

1, 4는 동시에 집합 A에 속하고, 마찬가지로 2, 3 도 동시에 집합 A에 속해야 한다.

따라서, 구하는 집합 A 는 $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$ 의 3 개다.

3. 다음 두 집합 A, B 에 대하여 $A = B$ 인 것은?

① $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots\}$, $B = \{x \mid x$는 8 이하의 짝수$\}$

② $A = \varnothing$, $B = \{0\}$

③ $A = \{a,\ b,\ c\}$, $B = \{b,\ c,\ d\}$

④ $A = \{0,\ 1\}$, $B = \{0,\ 1,\ 2\}$

⑤ $A = \{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ \cdots\}$,$B = \{x \mid x$는 5의 배수$\}$

해설

① $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots\}$, $B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$이므로 $B \subset A$, $A \not\subset B$
② $A = \varnothing$, $B = \{0\}$이므로 $A \subset B$, $B \not\subset A$
③ $A = \{a,\ b,\ c\}$, $B = \{b,\ c,\ d\}$이므로 포함 관계 없음.
④ $A = \{0,\ 1\}$, $B = \{0,\ 1,\ 2\}$이므로 $A \subset B$, $B \not\subset A$
⑤ $A = \{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ \cdots\}$,
$B = \{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ \cdots\}$이므로 $A = B$

4. 집합 $A = \{1, 2, 4, 6\}$ 의 부분집합 중 진부분집합의 개수는?

① 9 개 ② 11 개 ③ 13 개 ④ 15 개 ⑤ 17 개

해설

진부분집합은 부분집합 중에 자기 자신만을 제외한 것이므로, 진부분집합의 개수는 모든 부분집합의 개수보다 1개가 적다. 따라서 집합 A 의 진부분집합의 개수는 $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$ (개)이다.

5. 전체집합 $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, 6, 7, 8\}$ 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A = \{1,\ 4,\ 5,\ 7, 8\}$, $A \cap B = \{1,\ 4,\ 8\}$ 일 때, 집합 B 가 될 수 있는 부분집합의 개수는?

① 2 개　　② 4 개　　③ 8 개　　④ 16 개　　⑤ 32 개

해설

집합 B 는 원소 1, 4, 8 을 포함하고 원소 5, 7 을 포함하지 않는 U 의 부분집합이므로 $2^{8-3-2} = 2^3 = 8$(개) 이다 .

6. 집합 $A = \{x \mid x\text{는 15 이하의 3의 배수}\}$ 일 때, 적어도 하나의 원소가 짝수인 집합 A 의 부분집합의 개수는?

① 6 개 ② 12 개 ③ 18 개 ④ 24 개 ⑤ 30 개

해설

$A = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15\}$ 적어도 하나는 짝수인 부분집합의 개수는 모든 부분집합의 개수에서 홀수의 원소로만 이루어진 부분집합의 개수를 빼면되므로 $2^5 - 2^3 = 32 - 8 = 24$ (개) 이다.

7. 세 집합 $A = \{1, 5, 7, 11\}$, $B = \{x | x$는 12의 약수$\}$, $C = \{x \mid x$는 10미만의 2의 배수$\}$ 에 대하여 $n(B \cap (A \cup C))$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고치면 $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$ 이다.
$(A \cup C) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 11\}$ 이고 이것과 B 의 교집합을 구하면 $\{1, 2, 4, 6\}$ 이다.
따라서 원소의 개수는 4 개이다.

8. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 2, a\}$, $A \cap B = \{2, 5\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때, 집합 B 의 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$A \cap B = \{2, 5\}$ 이므로 집합 A 는 반드시 2 와 5 를 포함해야 한다.
따라서 $a = 5$ 이다.
집합 B 또한 $A \cap B = \{2, 5\}$ 에 의하여 원소 2 와 5 를 반드시 포함하고, 원소 1 은 포함하지 않는 집합이어야 한다.
$\therefore\ B = \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
$\therefore\ 2 + 3 + 4 + 5 = 14$

9. 두 집합 $A=\{x \mid x\text{는 5 이하의 자연수}\}$, $B=\{x \mid x\text{는 9보다 작은 홀수}\}$에 대하여
$(A\cap B)\subset X\subset(A\cup B)$ 를 만족하는 집합 X의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 8 개

해설

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$
$A\cap B=\{1,\ 3,\ 5\}$
$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$
$(A\cap B)\subset X\subset(A\cup B)$ 이므로 집합 X 는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$ 의 부분집합 중 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 집합이다. 이를 만족하는 집합 X 의 개수는
$\{1, 3, 5\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 3, 4, 5\}$, $\{1, 3, 5, 7\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 5, 7\}$, $\{1, 3, 4, 5, 7\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$의 8 개이다.

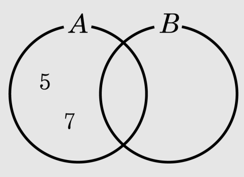
10. 집합 A, B 에 대하여 $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A - B = \{5, 7\}$ 일 때, 집합 B 는?

① $\{1\}$　　② $\{3\}$　　③ $\{1, 3\}$

④ $\{1, 3, 9\}$　　⑤ $\{1, 3, 7, 9\}$

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 집합 $B = \{1, 3, 9\}$ 이다.



11. 두 집합 $A = \{x \mid x\text{는 } 40\text{의 약수}\}$, $B = \{2, 4, 8, 10\}$ 에 대하여 $A * B = (A \cup B) - A$ 라고 할 때, $(A * B) * A$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 10,\ 20,\ 40\}$

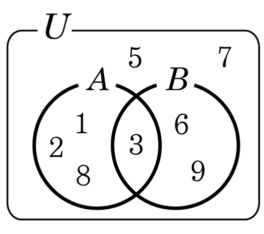
해설

$B \subset A$ 이므로 $A * B = \varnothing$

$(A * B) * A = A$

$\therefore\ A = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$

12. 다음 벤 다이어그램을 보고, $A^c \cup B^c$ 에 속하지 <u>않는</u> 원소는?



① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 8

해설

$A^c \cup B^c = \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

13. 집합 $A = \{1,3,5,7,9\}, B = \{7,9,10\}$ 이고, $n(A \cup X) = 5, n((A-B) \cap X) = 3$ 일 때, 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 4개

해설

$n(A \cup X) = 5$ 에서 $n(A) = 5$ 이므로 $A \cup X = A$,즉 $X \subset A$ 가 된다.
또, $n((A-B) \cap X) = n(\{1,3,5\} \cap X) = 3$ 에서 $(A-B) \subset X$ 이다. 따라서 $(A-B) \subset X \subset A$ 이므로
$1,3,5$ 를 반드시 포함하는 A 의 부분집합의 개수와 같으므로 $2 \times 2 = 4$(개) 이다.

14. $(A^c \cap B^c) \cup (A \cup B)$ 을 간단히 하면?

① A ② B ③ $\varnothing$ ④ U ⑤ $A \cap B$

해설

$(A^c \cap B^c) \cup (A \cup B) = (A \cup B)^c \cup (A \cup B)$
$= U$

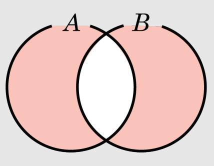
15. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 50\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x \mid x$는 2 의 배수$\}$, $B = \{x \mid x$는 3 의 배수$\}$에 대하여 $(A - B) \cup (B - A)$ 의 원소의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 25 개

해설

$(A-B)\cup(B-A)$ 을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같으므로



$n(A-B)$ 와 $n(B-A)$ 를 각각 구하여 더하면 된다.
$A \cap B$ 는 6 의 배수의 집합이므로
$n(A) = 25$, $n(B) = 16$, $n(A \cap B) = 8$

$$n(A-B) = n(A) - n(A \cap B) = 25 - 8 = 17$$
$$n(B-A) = n(B) - n(A \cap B) = 16 - 8 = 8$$
$$\therefore n((A-B) \cup (B-A)) = n(A-B) + n(B-A) = 17 + 8 = 25$$

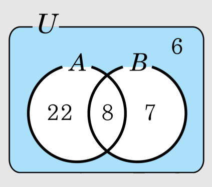
16. 영진이네 반 학생 중 가, 나 책을 읽은 학생이 각각 30명, 15명이었고 가, 나 책을 모두 읽은 학생은 8명, 가 책을 읽지 않은 학생은 15명이었다. 이때, 가 책과 나 책을 모두 읽지 않은 학생 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 8 명

해설

주어진 문제를 벤 다이어그램을 활용하여 해결할 수 있다. 벤 다이어그램의 각 영역에 해당하는 학생의 수를 기입하면 다음과 같다.



17. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 한다.
$\sim p \to \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \cup Q = U$　② $P \cap Q = \varnothing$　③ $Q \subset P$
④ $P \subset Q$　⑤ $P = Q$

해설

$\sim p \to \sim q$이 참이면 $P^c \subset Q^c \Leftrightarrow P \supset Q$

해설

$\sim p \to \sim q$이 참이면 대우인 $q \to p$ 가 참
따라서 $Q \subset P$

18. 다음 중 명제 'x, y 가 유리수이면 xy 는 유리수이다.'의 이가 거짓임을 밝히기 위한 반례로 옳은 것은?

① $x = 0,\ y = 2$　　② $x = 1,\ y = 2$

③ $x = 0,\ y = \sqrt{2}$　　④ $x = 1,\ y = \sqrt{2}$

⑤ $x = \sqrt{2},\ y = \sqrt{3}$

해설

'x, y 가 유리수이면 xy 는 유리수이다.'의 이는 'x또는y 가 유리수가 아니면 xy 는 유리수가 아니다.' 여기에서 가정을 성립시키면서 결론을 성립시키지 않는 것을 찾으면 된다.
즉, ③ $x = 0, y = \sqrt{2}$ 가 반례로 적당하다.

19. 다음 명제 중 그 대우가 참인 것을 모두 고르면?

① 마름모이면 정사각형이다.

② $a < b$ 이면 $|a| < |b|$ 이다.

③ $A \cup B = A$ 이면 $B \subset A$ 이다

④ $ab = 0$ 이면 $a^2 + b^2 = 0$ 이다.

⑤ $x - 1 = 0$ 이면 $x^2 - 1 = 0$ 이다.

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이므로 참인 명제를 고르면 된다.

① (반례) □ABCD 에서 네 변의 길이가 같고 $\angle A = \angle C = 100°$, $\angle B = \angle D = 80°$ 일 때, □ABCD 는 마름모이지만 정사각형이 아니므로 거짓이다.

② (반례) $a = -3, b = 1$ 일 때, $a < b$ 이지만 $|a| > |b|$ 이므로 거짓이다.

④ (반례) $a = 0, b = 1$ 일 때, $ab = 0$ 이지만 $a^2 + b^2 \neq 0$ 이므로 거짓이다.

20. 실수 a, b에 대하여 $ax+b=0$이 x에 대한 항등식이 되기 위한 필요충분조건을 다음 중 보기에서 모두 고르면?

보기

㉠ $a^2+b^2=0$	㉡ $ab=0$
㉢ $a+bi=0$	㉣ $a+b\sqrt{3}=0$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉠, ㉢, ㉣

해설

$ax+b=0$이 x에 대한 항등식 $\leftrightarrow$ $a=0,\ b=0$
㉠ $a^2+b^2=0 \ \leftrightarrow\ a^2=0,\ b^2=0 \leftrightarrow a=0,\ b=0$
㉡ $ab=0 \ \leftrightarrow\ a=0$ 또는 $b=0$
㉢ $a+bi=0 \ \leftrightarrow\ a=0,\ b=0$
㉣ (반례)$a=\sqrt{3},\ b=-1 \ \Rightarrow\ a+b\sqrt{3}=0$
$\therefore$ ㉠, ㉢

21. 다음 두 조건 $p : 2 \le x \le 5,\ q : x \ge a$ 에 대하여 p 는 q이기 위한 충분조건이 되도록 상수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 각각의 진리집합을 P, Q 라 할 때, $P \subset Q$ 이 성립해야 한다. 따라서 $2 \le x \le 5$ 를 만족하는 영역은 $x \ge a$를 만족하는 영역에 포함되어야 함으로 $a \le 2$
따라서 a의 최댓값은 2

22. 임의의 실수 $x,\ y$에 대하여 $x^2+4xy+4y^2+10x+ay+5b \geq 0$ 이 성립하기 위한 상수 $a,\ b$에서 $a+b$의 최솟값을 구하면?

① 5 ② 15 ③ 25 ④ 35 ⑤ 45

해설

$x^2+2(2y+5)x+4y^2+ay+5b \geq 0$이 임의의 실수 x에 대하여 성립하므로

$\frac{D}{4}=(2y+5)^2-(4y^2+ay+5b) \leq 0$

정리하면 $(20-a)y+25-5b \leq 0 \cdots$ ㉠

㉠이 임의의 실수 y 에 대하여 성립하므로

$20-a=0,\ 5b-25 \geq 0$

$\therefore\ a=20,\ b \geq 5$

$\therefore\ a+b \geq 25$

23. $3a+4b=1$ 일 때, $\frac{4}{a}+\frac{3}{b}$ 의 최솟값을 구하면?(단, $a>0,\ b>0$)

① 12　　② 24　　③ 36　　④ 48　　⑤ 60

해설

$a>0,\quad b>0$ 이므로 산술기하평균의 관계로부터

$3a+4b=1\geq 2\sqrt{12ab}$

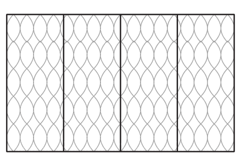
$\frac{1}{2}\geq\sqrt{12ab},\ \frac{1}{48}\geq ab$

$\frac{4}{a}+\frac{3}{b}\geq 2\sqrt{\frac{12}{ab}}$

$ab=\frac{1}{48}$ (최대) 일 때 $\sqrt{\frac{12}{ab}}$ 는 최소가 된다.

$\therefore\ \frac{4}{a}+\frac{3}{b}\geq 2\sqrt{\frac{12}{\frac{1}{48}}}=2\cdot 2\cdot 12=48$

24. 어떤 농부가 길이 60 m 의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① 60m^2　② 70m^2　③ 80m^2
④ 90m^2　⑤ 100m^2

해설

전체 직사각형의 가로를 a, 세로를 b라 하면
$2a+5b=60$
$a,\ b$는 양수이므로
$60=2a+5b \geq 2\sqrt{2a\cdot 5b}$
양변을 제곱하면 $40ab \leq 60^2$
$\therefore\ ab \leq 90$
한편, 직사각형의 넓이는 $S=ab$이므로
$S=ab \leq 90$
따라서, 넓이의 최댓값은 $90(\text{m}^2)$

25. $x^2+y^2+z^2=2$를 만족하는 실수 x, y, z에 대하여 $x+2y+3z$의 최대값을 구하면?

① 14 ② 17 ③ $7\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+2^2+3^2)(x^2+y^2+z^2) \ge (x+2y+3z)^2$

$14 \cdot 2 \ge (x+2y+3z)^2$

$-2\sqrt{7} \le x+2y+3z \le 2\sqrt{7}$

$\therefore$구하는 최대값은 $2\sqrt{7}$