

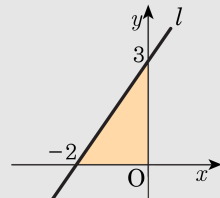
1. 직선 $3x - 2y + 6 = 0$ 이 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

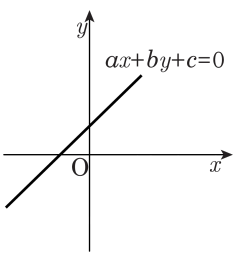
해설

$3x - 2y + 6 = 0$ 을 그래프에 도시해보면,



$\therefore$ 빗금 친 부분의 넓이 : $\frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$

2. 직선 $ax+by+c=0$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $cx+ay+b=0$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?



- ① 제1사분면
- ② 제2사분면
- ③ 제3사분면
- ④ 제4사분면
- ⑤ 제1사분면과 제3사분면

해설

$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ 이므로
주어진 직선의 방정식은 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$
가울기 : $-\frac{a}{b} > 0 \quad \therefore \frac{a}{b} < 0$
y 절편 : $-\frac{c}{b} > 0 \quad \therefore \frac{c}{b} < 0$
두 부등식에서 $\frac{a}{c} > 0$
마찬가지로 일차함수 $cx+ay+b=0$ 은
 $y = -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a}$,
가울기 : $-\frac{c}{a} < 0$
y 절편 : $-\frac{b}{a} > 0$
이상에서 이 직선은 제3사분면을 지나지 않는다.

3. 두 점 A(3, 2), B(a, b)를 지나는 직선이 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 과 직교하고, 그 교점은 선분 AB를 2 : 1로 내분한다. 이때, $3a + b$ 의 값은?

- ① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$$\frac{b-2}{a-3} = 2$$

$$b-2 = 2(a-3), \quad b = 2a-4 \dots\dots \textcircled{1}$$

$\overline{AB}$ 를 2 : 1로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1 \cdot 3}{2+1}, \frac{2b+1 \cdot 2}{2+1} \right) = \left(\frac{2a+3}{3}, \frac{2b+2}{3} \right) \text{이고,}$$

이 점은 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3} + 2 \frac{2b+2}{3} - 3 = 0,$$

$$a + 2b - 1 = 0 \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = \frac{9}{5}, \quad b = -\frac{2}{5}$$

$$\therefore 3a + b = 5$$

4. 세 직선 $2x - y - 4 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$, $y = ax + 2$ 가 오직 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

① 2

② 1

③ 0

④ -1

⑤ -2

해설

세 직선이 한 점에서 만나려면 두 직선의 교점을 나머지 한 직선이 지나야 한다.

$$2x - y - 4 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$x - 2y - 2 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$y = ax + 2 \cdots \textcircled{3}$ 이라 할 때,

①, ②의 교점이 ③위에 있으면, 한 점에서 만나므로

①, ②를 연립하여 풀면 $x = 2$, $y = 0$

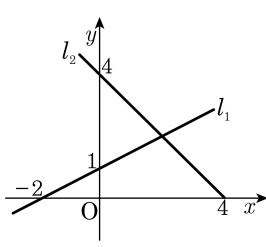
두 직선의 교점 (2, 0) 이 직선 $y = ax + 2$ 를 지나면 한 점에서 만나므로

$$0 = 2a + 2, 2a = -2$$

$$\therefore a = -1$$

5. 다음 그림과 같은 좌표평면 위의 두 직선 l_1, l_2 의 교점과 원점을 지나는 직선의 방정식은 $y = ax$ 이다. 이때, a 의 값은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$



해설

직선 l_1 은 x 절편이 -2 이고,
 y 절편이 1 이므로 $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1$ 에서
 $x - 2y = -2 \dots\dots \textcircled{1}$
 직선 l_2 는 x 절편이 4 이고, y 절편이 4 이므로
 $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ 에서
 $x + y = 4 \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하면 풀면 $x = 2, y = 2$
 따라서, 구하는 직선의 방정식은 $y = x$
 $\therefore a = 1$

6. 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1, 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

준 식에서 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 14$ 이므로

중심은 $(2, -3)$ 이다.

구하는 원의 반지름을 r 라 하면

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = r^2$ 이고,

이 원이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$(1 - 2)^2 + (2 + 3)^2 = r^2$

$\therefore r^2 = 26$

7. 두 점 $A(1, 5)$, $B(-3, -1)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 13$ ② $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 52$

③ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 13$ ④ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$

⑤ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 52$

해설

원의 중심은 두 점 A , B 의 중점이므로,

$$\left(\frac{1-3}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = (-1, 2) \text{ 이다.}$$

또, 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(-3-1)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{13}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$$

8. 기울기가 2 이고 점 (2, 1) 을 지나는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라 할 때, 선분 AB 의 길이는?

- ① $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ ③ 5 ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ 6

해설

기울기가 2 이고 점 (2, 1) 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 1 = 2(x - 2), \therefore y = 2x - 3 \cdots \textcircled{1}$$

①에 $y = 0$ 을 대입하면

$$0 = 2x - 3, \therefore x = \frac{3}{2} \text{ 이므로}$$

x 축과 만나는 점 A 의 좌표는

$$A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

①의 y 절편이 -3 이므로 y 축과

만나는 점 B 는 B(0, -3)

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{\left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + (-3 - 0)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

9. 두 직선 $x - 3y + 5 = 0$, $x + 9y - 7 = 0$ 의 교점을 지나고, x 축의 양의 방향과 30° 의 각을 이루는 직선의 방정식이 $x + by + c = 0$ 일 때 $b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 식을 연립하여 풀면 두 직선의 교점의 좌표는 $(-2, 1)$ 이고, 기울기는 $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y - 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + 2)$

$$\therefore x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} + 2 = 0$$

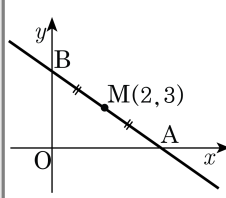
$$\therefore b = -\sqrt{3}, c = 2 + \sqrt{3} \quad \therefore b + c = 2$$

10. 직선 l 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 두 점 A, B의 중점 M의 좌표는 (2, 3)이다. 이 때, 직선 l 의 방정식은?

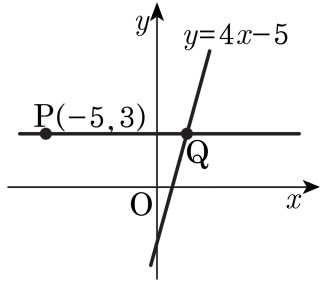
- ① $y = -2x + 2$ ② $y = -\frac{3}{2}x + 3$ ③ $y = -\frac{2}{3}x + 2$
④ $y = -\frac{3}{2}x + 6$ ⑤ $y = \frac{2}{3}x + 6$

해설

A, B의 중점이 (2, 3)이므로
A(4, 0), B(0, 6) 직선 l 의 x 절편이 4, y
절편이 6이므로
직선의 방정식은 $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} + 1$ 이다.
 $\therefore y = -\frac{3}{2}x + 6$



11. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $P(-5, 3)$ 을 지나고 x 축에 평행한 직선이 일차함수 $y = 4x - 5$ 의 그래프와 만나는 점을 Q 라 한다. $\overline{PQ}$ 의 길이는?



- ① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

해설

점 P 를 지나고 x 축에 평행한 직선의 방정식은 $y = 3$ 이다.

점 Q 의 y 좌표가 3이므로

$$y = 4x - 5 \text{에 } y = 3 \text{을 대입하면 } 3 = 4x - 5$$

$$\therefore x = 2$$

따라서 점 Q 의 좌표는 $(2, 3)$ 이다.

$$\therefore \overline{PQ} = 2 - (-5) = 7$$

12. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(-2k-1, 5)$, $B(k, -k-10)$, $C(2k+5, k-1)$ 가 일직선 위에 있을 때, k 의 값의 곱을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로
직선 AB와 직선 BC의 기울기는 같다.

$$\frac{-k-10-5}{k-(-2k-1)} = \frac{(k-1)-(-k-10)}{2k+5-k}$$

이 식을 정리하면 $k^2 + 7k + 12 = 0$

$\therefore k$ 의 값의 곱은 12이다.

13. 직선 $ax + by + c = 0$ 에 대하여 $ab < 0, bc > 0$ 일 때, 이 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답 : 사분면

▷ 정답 : 제 2사분면

해설

$ax + by + c = 0$ 에서

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

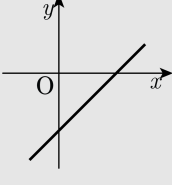
주어진 조건에서

$ab < 0, bc > 0$ 이므로

$$-\frac{a}{b} > 0, -\frac{c}{b} < 0$$

$\therefore$ (기울기) > 0 , (y 절편) < 0

따라서 주어진 직선은 다음 그림과 같으므로 지나지 않는 사분면은 제 2 사분면이다.



14. 두 점 $A(-2, -1)$, $B(4, 3)$ 에 대하여 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

선분 AB의 중점의 좌표는 $(1, 1)$

선분 AB의 기울기는 $\frac{3 - (-1)}{4 - (-2)} = \frac{2}{3}$

따라서, 선분 AB의 수직이등분선은 점 $(1, 1)$ 을 지나고, 기울기가 $-\frac{3}{2}$ 인 직선이므로

구하는 직선의 방정식은 $y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 1)$

즉, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

따라서, $a + b = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$

15. 점 $(3, 4)$ 에서 직선 $2x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 3$

해설

$$\frac{|2 \times 3 - 4 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \text{ 이므로 } |2 + k| = 5 \text{ 이다.}$$

따라서 $k = 3$ ($\because k$ 는 양수)

16. 두 직선 $3x + 4y = 12$, $3x + 4y = 7$ 사이의 거리를 구하면?

① -3

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$3x + 4y = 12$ 위의 임의의 한 점을 잡는다.
(4, 0)과 $3x + 4y = 7$ 사이의 거리를 구한다.

$$\therefore \frac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 - 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$$

17. 다음 두 직선 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하시오.

$3x - y - 6 = 0 \text{ , } \quad 3x - y + k = 0$

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 4$

해설

직선 $3x - y - 6 = 0$ 위의 한 점 $(2, 0)$ 에서 직선

$3x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|3 \times 2 - 0 + k|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|6 + k|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$|6 + k| = 10$$

따라서 $k = 4$ ($\because k$ 는 양수)

18. 두 직선 $x + y - 1 = 0$, $2x - y + 7 = 0$ 의 교점을 지나고 원점에서
거리가 2 인 직선의 방정식의 기울기는?

- ① $\frac{5}{8}$ ② $-\frac{5}{8}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $-\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

해설

먼저 두 직선의 교점을 구하면 $(-2, 3)$

이 점을 지나는 직선의 방정식은

$$y = m(x + 2) + 3$$

원점과의 거리를 구하면,

$$\frac{|2m + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2$$

$$\Rightarrow (2m + 3)^2 = 4(m^2 + 1)$$

$$\Rightarrow m = -\frac{5}{12} \quad \cdots \text{기울기}$$

19. 원점을 지나고, 점(2, 1) 에서의 거리가 2 인 직선의 기울기 m 의 값은?

- ① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $-\frac{5}{4}$

해설

점 $P(x_1, y_1)$ 과 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

원점을 지나고, 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$mx - y = 0$$

또한, 점(2, 1) 에서 이 직선까지의 거리가 2이므로,

$$\frac{|2m - 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2, \quad |2m - 1| = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면 $4m^2 - 4m + 1 = 4m^2 + 4$,

$$-4m = 3 \therefore m = -\frac{3}{4}$$

20. 점 $(3, 4)$ 에서 직선 $2x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

▶ 답 :

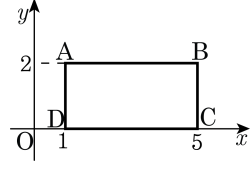
▷ 정답 : 3

해설

$$\frac{|2 \times 3 - 4 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \text{ 이므로, } |2 + k| = 5 \text{ 이다.}$$

따라서 $k = 3$ ($\because k$ 는 양수)

21. 점 $(-1, -1)$ 을 지나고 다음 그림과 같은 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식이 $ax + by + 1 = 0$ 일 때, $a - b$ 의 값은?



- ① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$(-1, -1)$ 을 지나므로, $-a - b + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$
 그리고 직선이 사각형을 이등분 하려면 사각형의 중심
 $(\frac{5+1}{2}, \frac{0+2}{2})$ 를 지나야 한다.
 $\Rightarrow 3a + b + 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 을 연립하면, $a = -1, b = 2$
 $\therefore a - b = -3$

22. 세 점 A(1, 3), B(3, 1), C(5, 5) 를 꼭지점으로 하는 $\triangle ABC$ 와 직선 $kx - y + 2k - 1 = 0$ 이 만난다. 상수 k 의 최대값을 M, 최소값을 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$ 의 값은?

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

직선의 방정식 $ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 두 직선 $ax + by + c = 0$ 과 $a'x + b'y + c' = 0$ 의 교점을 지난다.

그림과 같이 직선 $kx - y + 2k - 1 = 0$ 즉 $y = k(x + 2) - 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, -1)$ 을 지나므로 이 직선이 $\overline{AB}$ 와 만날 때, 삼각형과 만난다.

1) 점 A 를 지날 때, $3 = k(1 + 2) - 1, \quad k = \frac{4}{3}$

2) 점 B 를 지날 때, $1 = k(3 + 2) - 1, \quad k = \frac{2}{5}$

따라서 $\frac{2}{5} \leq k \leq \frac{4}{3}$ 일 때, 주어진 직선은 삼각형과 만난다.

$\therefore \frac{M}{m} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{10}{3}$

23. 점 (a, b) 가 직선 $y = 2x - 3$ 위를 움직일 때, 직선 $y = ax + 2b$ 는 항상 일정한 점 P를 지난다. 이 때, 점 P의 좌표는?

① $P(-4, 6)$

② $P(-4, -6)$

③ $P(2, 3)$

④ $P(3, 2)$

⑤ $P(-2, -4)$

해설

점 (a, b) 가 직선 $y = 2x - 3$

위에 있으므로 $b = 2a - 3$

따라서 $y = ax + 2b$ 에서

$y = ax + 2(2a - 3)$ 이므로

a 에 대하여 정리하면

$$a(x + 4) - (6 + y) = 0$$

이 식이 a 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 a 에 대한
항등식이다.

$$\therefore x + 4 = 0, 6 + y = 0$$

$$\therefore P(-4, -6)$$

24. 직선 $(k-3)x + (k-1)y + 2 = 0$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점과 직선 $x + 2y - 4 = 0$ 사이의 거리는?

- ① $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- ④ $\sqrt{5}$
- ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

$(k-3)x + (k-1)y + 2 = 0$ 을 k 에 대하여
정리하면 $k(x+y) + (-3x-y+2) = 0$ 이 식이
 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
 $x+y=0$, $-3x-y+2=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=-1$
따라서 점 $(1, -1)$ 과 직선 $x+2y-4=0$
사이의 거리는
 $\frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

25. 좌표평면에서 원점과 직선 $x+y-2+k(x-y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은? (단, k 는 실수)

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 2

⑤ $\sqrt{5}$

해설

준식을 변형하면 $(1+k)x+(1-k)y-2=0$ 이므로

$$f(k) = \frac{|-2|}{\sqrt{(1+k)^2+(1-k)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+1}}$$

따라서, $k=0$ 일 때 $f(k)$ 의 최댓값은 $\sqrt{2}$