1. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 $f,\ g,\ h$ 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x + 4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(2) &= ((h \circ g) \circ f)(2) \\ &= (h \circ g)(f(2)) \\ &= (h \circ g)(4) \\ &= 3 \times 4 + 4 = 16\end{aligned}$$

2. 두 함수 $f(x) = x + 2$, $g(x) = 2x - 3$일 때, 합성함수 $g \circ f$의 역함수 $(g \circ f)^{-1}(x)$를 구하면 무엇인가?

① $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$　② $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$　③ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
④ $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$　⑤ $y = \frac{1}{2}x + 1$

해설

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x+2) \\ &= 2(x+2) - 3 = 2x + 1\end{aligned}$$

합성함수 $g \circ f$는 일대일대응이므로
역함수가 존재한다.
$y = 2x + 1$로 놓고 x에 대하여 풀면
$x = \frac{y}{2} - \frac{1}{2}$ 이 된다.
따라서, $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 이다.

3. 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 다음 보기의 X 에서 X 로의 함수 중 항등함수인 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $f(x) = x$　　㉡ $g(x) = x^3$

㉢ $h(x) = x^2 + 2$

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉠, ㉡　⑤ ㉠, ㉢

해설

㉠ $f(-1) = -1,\ \ f(0) = 0,\ f(1) = 1$ 이므로
$f(x)$는 항등함수이다.

㉡ $g(-1) = -1,\ \ g(0) = 0,\ g(1) = 1$ 이므로
$g(x)$는 항등함수이다.

㉢ $h(-1) = 3,\ \ h(0) = 2,\ h(1) = 3$ 이므로
$h(x)$는 항등함수가 아니다.

4. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = ax + b|x|$ (a, b는 상수)가 역함수를 가질 조건은?

① $a^2 - b^2 < 0$　② $a^2 - b^2 > 0$　③ $a + b > 0$

④ $a - b > 0$　⑤ $a - b < 0$

해설

$$f(x) = \begin{cases} (a+b)x & (x \geq 0) \\ (a-b)x & (x < 0) \end{cases}$$

함수$f(x)$ 가 역함수를 가지려면
$f(x)$ 가 증가함수이거나 감소함수이어야 하므로
두 직선 $y = (a+b)x, y = (a-b)x$ 의 기울기의 부호가 같아야 한다.
$\therefore (a+b)(a-b) > 0,\ \ a^2 - b^2 > 0$

5. 함수 $y = a|x+1| - b|x-1| + 2$ 의 그래프가 y축에 대하여 대칭이기 위한 필요충분조건을 구하면?

① $a + b = 0$　　② $a - b = 0$　　③ $a + b = 1$

④ $a - b = 1$　　⑤ $a + b = 2$

해설

$y = f(x)$ 의 그래프가 y축에 대하여 대칭이면 $f(x) = f(-x)$ 이다.

$f(x) = a|x+1| - b|x-1| + 2$ 라 하면

$f(-x) = a|-x+1| - b|-x-1| + 2$

$= -b|x+1| + a|x-1| + 2$

$f(x) = f(-x)$ 에서 $a = -b$

$\therefore\ a + b = 0$