1. 방정식 $|x-1|=2$ 의 해를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : −1

해설

i) $x \geq 1$ 일 때
$|x-1| = x-1$ 이므로, $x-1=2$
$\therefore x=3$
ii) $x < 1$ 일 때
$|x-1| = -x+1$ 이므로, $-x+1=2$
$\therefore x=-1$
따라서 (i), (ii) 에서 $x=3$ 또는 $x=-1$

2. $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -\sqrt{2}$ ② $x = \sqrt{2}$ ③ $x = 0$
④ $x = 4 - \sqrt{2}i$ ⑤ $x = 6$

해설

$x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})^2 = 0$
$\therefore\ x = \sqrt{2}$

3. 이차방정식 $x^2 - px + 2p + 1 = 0$이 중근을 갖도록 하는 실수 p의 값을 모두 곱하면?

① -8　② -4　③ 1　④ 4　⑤ 8

해설

$D = p^2 - 4(2p + 1)$

$= p^2 - 8p - 4 = 0$

판별식으로부터 나온 p에 대한 방정식의 근들이 주어진 식이 중근을 갖게 하므로

실수 p 값들의 곱은 근과 계수의 관계에서 -4이다.

4. x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a+3)x+a^2+7=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a \geq 0$ ② $-1 < a < 0$ ③ $-2 < a < 0$
④ $a \geq -\frac{1}{3}$ ⑤ $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$

해설

주어진 이차방정식이 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (a^2+7) \geq 0$

$a^2+6a+9-a^2-7 \geq 0$

$6a+2 \geq 0 \quad \therefore a \geq -\frac{1}{3}$

5. 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+a^2+b-2=0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\frac{D}{4}=(k-a)^2-(k^2+a^2+b-2)=0$

$\therefore\ -2ka-b+2=0$

이 식은 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k에 대한 항등식이다.

$a=0,\ b=2$

$\therefore\ a+b=2$

6. 이차식 $ax^2+4x+2a$가 x에 대한 완전제곱식이 되도록 하는 실수 a의 값은?

① ± 1 ② $\pm\sqrt{2}$ ③ ± 2 ④ $\pm\sqrt{3}$ ⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

주어진 식이 x에 대한 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=2^2-a\cdot 2a=0$

$4-2a^2=0,\ a^2=2$

$\therefore a=\pm\sqrt{2}$

7. 이차방정식 $3x^2-6x+4=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^3+\beta^3$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\dfrac{4}{3}$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=8-3\times\dfrac{4}{3}\times 2=0$

8. 이차식 x^2+2x+4 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

② $(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$

③ $(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

④ $(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

⑤ $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

해설

$x^2+2x+4=0$ 의 해를 구하면

$x=-1\pm\sqrt{1-4}=-1\pm\sqrt{3}i$

$\therefore x^2+2x+4$

$=\left\{x-(-1+3\sqrt{i}\right\}\left\{x-(-1-\sqrt{3}i)\right\}$

$=(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

9. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, ab 의 값은?

① -3　② 0　③ 2
④ 4　⑤ $2 + 2\sqrt{3}$

해설

유리계수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$
근과 계수와의 관계에 의해
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 2 + \sqrt{3}$ 대입
$(2 + \sqrt{3})^2 - a \cdot (2 + \sqrt{3}) + b = 0$
계수가 유리수이므로
$\sqrt{3} \cdot (4 - a) + (b - 2a + 7) = 0$
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

10. 방정식 $(a^2-3)x-1=a(2x+1)$ 의 해가 존재하지 않기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(a^2-2a-3)x=a+1$

$(a-3)(a+1)x=a+1$

$\therefore a=3$ 이면 해가 없다.

11. 방정식 $|x-3|+|x-4|=2$ 의 해의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

i) $x<3$ 일 때,
$-(x-3)-(x-4)=3,\ -2x=-5$
$\therefore\ x=\frac{5}{2}$
ii) $3\le x<4$ 일 때
$(x-3)-(x-4)=2,\ 0\cdot x=1$
$\therefore$ 해가 없다.
iii) $x\ge 4$ 일 때
$x-3+x-4=2,\ 2x=9$
$\therefore\ x=\frac{9}{2}$
따라서 $x=\frac{5}{2},\ \frac{9}{2}$ 이고 그 합은 7

12. 이차방정식 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근에 대한<보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $k > 1$ 이면 두 근은 실근이다.

㉡ $k = 1$ 이면 중근을 갖는다.

㉢ 두 근의 곱은 실수이다.

㉣ $0 < k < 1$ 이면 두 근은 순허수이다.

① ㉠, ㉡　　② ㉡, ㉣　　③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉡, ㉢, ㉣　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근을 구하면 $x = i \pm \sqrt{-1+k}$
㉠ $k > 1$ 이어도 x 는 허수이다.<거짓>
㉡ $k = 1$ 이면 $x = i$ 로 중근을 갖는다.<참>
㉢ 두 근의 곱 $-k$ 는 허수일 수도 있다.<거짓>
㉣ $0 < k < 1$ 이면 $-1 < -1 + k < 0$ 이므로 $\sqrt{-1+k} = ai(a \neq 1)$ 의 형태가 되어 x 는 순허수이다.

13. x에 대한 방정식 $ix^2+(1+i)x+1=0$의 해를 구하여라. (단, $x \neq i$)

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

양변에 $-i$를 곱하면

$(-i)\cdot ix^2-i(1+i)x-i=0$

$x^2+(1-i)x-i=0$

$(x-i)(x+1)=0$

$x \neq i$이므로 $x=-1$

14. 방정식 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때
$x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x+1)(x-3) = 0$
$x = -1$ 또는 $x = 3$
그런데 $x \geq 0$이므로 $x = 3$
ⅱ) $x < 0$일 때
$x^2 + 2x - 3 = 0$, $(x-1)(x+3) = 0$
$x = 1$ 또는 $x = -3$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -3$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$
따라서 근의 합은 0이다.

15. $1 < x < 4$일 때, 방정식 $x^2 + [x] = 4x$의 근의 개수는?(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

(i) $1 < x < 2$일 때, $[x] = 1$이므로
$x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \therefore x = 2 \pm \sqrt{3}$
이것은 모두 $1 < x < 2$를 만족하지 않으므로
근이 될 수 없다.
(ii) $2 \le x < 3$일 때, $[x] = 2$이므로
$x^2 - 4x + 2 = 0, \ \therefore x = 2 \pm \sqrt{2}$
이것은 모두 $2 \le x < 3$를 만족하지 않으므로
근이 될 수 없다.
(iii) $3 \le x < 4$일 때, $[x] = 3$이므로
$x^2 - 4x + 3 = 0, \ (x-1)(x-3) = 0$
$\therefore x = 1$ 또는 3
그런데 $3 \le x < 4$를 만족하는 것은 $x = 3$
따라서 주어진 식의 근은 1 개이다.

16. x에 대한 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이 되도록 유리수 p, q를 정할 때, $p+q$의 값은?

① -4　② -3　③ -2　④ 1　⑤ 2

해설

유리계수 이차식의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이면,
그 켤레근인 $2-\sqrt{3}$도 방정식의 근이므로
근과 계수와의 관계에 의해서
$-p=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$
$\therefore\ p=-4$
$q=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$
$\therefore\ q=1$
$\therefore\ p+q=-4+1=-3$

17. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2+\sqrt{5}i$일 때, 실수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -36 ② -18 ③ 18 ④ 24 ⑤ 36

해설

a, b가 실수이므로
이차방정식의 한 근이 $2+\sqrt{5}i$이면
다른 한 근은 $2-\sqrt{5}i$이다.
근과 계수의 관계의 의하여
$-a=(2+\sqrt{5}i)(2-\sqrt{5}i)=4$
$\therefore a=-4$
$b=(2+\sqrt{5}i)(2-\sqrt{5}i)=9$
$\therefore ab=-36$

18. 양의 실수 $a,\ b$에 대하여 x에 대한 이차방정식 $ax^2+2(b+i)x+1+2i=0$의 두 근이 서로 같을 때, $a+b$의 값은?

① $1+\sqrt{5}$ ② $1-\sqrt{5}$ ③ $2+\sqrt{3}$
④ $2-\sqrt{3}$ ⑤ $1+\sqrt{3}$

해설

복소계수 이차방정식에서도 중근을 가질 조건은 $D=0$ 이다.
$ax^2+2(b+i)x+1+2i=0$ 에서
$\frac{D}{4}=(b+i)^2-a(1+2i)=0$
위의 식을 정리하면
$(b^2-1-a)+(2b-2a)i=0$ ⋯⋯㉠
$a,\ b$ 가 실수이므로 ㉠에서
$b^2-1-a=0$ ⋯⋯㉡
$2b-2a=0$ ⋯⋯㉢
㉢에서 $a=b$
$a=b$ 를 ㉡에 대입하면
$b^2-1-b=0$, $b^2-b-1=0$
$\therefore\ b=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
그런데 $a,\ b$ 가 양의 실수이므로
$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$\therefore\ a+b=1+\sqrt{5}$

19. x에 관한 이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가질 때 $x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$의 근을 판별하면?

① 중근 ② 한 실근과 한 허근

③ 서로 다른 두 실근 ④ 서로 같은 두 실근

⑤ 서로 다른 두 허근

해설

이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가지려면
$D'=4+a-b=0$
$\therefore b=a+4$
$x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$
$x^2-2(a-1)x+a^2-2a+16=0$
$D'=(a-1)^2-(a^2-2a+16)=-15<0$
$\therefore$ 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

20. x에 대한 다음 방정식의 두 근의 곱은?

$$2\sqrt{3}x^2 - x - \sqrt{3} = 0$$

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

해설

주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면

$(2x - \sqrt{3})(\sqrt{3}x + 1) = 0$

$\therefore\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

21. 이차방정식 $x^2-2ax+2a+4=0$의 두 근이 모두 정수일 때, 정수 a 값의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

두 근을 α,β라 하면

$x^2-2ax+2a+4=(x-\alpha)(x-\beta)=0$

$\therefore \alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=2a+4$

$\alpha\beta-\alpha-\beta=4$

$(\alpha-1)(\beta-1)=5$

α,β는 정수이므로

$\therefore (\alpha,\beta)=(2,6),(6,2),(0,-4),(-4,0)$

$\therefore a=4,-2$

22. 두 양의 실수 $x,\ y$ 가 $2x^2 + xy - 2y^2 = 0$을 만족할 때, $\frac{x}{y}$ 를 구하면?

① $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$　② $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$　③ $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$
④ $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$　⑤ $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

해설

$x > 0,\ y > 0$ 에서 $2x^2 + xy - 2y^2 = 0$의 양변을 y^2 으로 나누면

$2(\frac{x}{y})^2 + (\frac{x}{y}) - 2 = 0$

$\frac{x}{y} = t$라 하면 $(t > 0)$

$2t^2 + t - 2 = 0$

근의 공식에 대입하면

$t = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$

$\therefore t = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ $(t > 0)$ $\frac{x}{y} = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$

23. m은 양의 정수이고, x에 관한 이차방정식 $x^2-(3+\sqrt{2})x+m\sqrt{2}-4=0$ 의 한 근은 정수이다. 이 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

정수근을 α라 하자

$\alpha^2-(3+\sqrt{2})\alpha+m\sqrt{2}-4=0$

$(m-\alpha)\sqrt{2}+\alpha^2-3\alpha-4=0$

$m=\alpha$ 그리고 $\alpha^2-3\alpha-4=0$

$(\alpha+1)(\alpha-4)=0$

$\alpha=-1$ 또는 $\alpha=4$

m이 양의 정수이므로 $\alpha=4$에서 $m=4$

24. $a^2-3a+1=0$일 때, $a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$a^2-3a+1=0$에서

$a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}=a-1+\dfrac{3}{3a}=a+\dfrac{1}{a}-1$

한편, $a^2-3a+1=0$의 양변을 a로 나누면

$a-3+\dfrac{1}{a}=0 \quad \therefore\ a+\dfrac{1}{a}=3$

$\therefore$(준식)$=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-1=2$

25. $x^2 + xy + ay^2 + x + y - 2$가 x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값을 구하면 ?

① $\frac{2}{9}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{4}{9}$　④ $\frac{5}{9}$　⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$x^2 + xy + ay^2 + x + y - 2$

$= x^2 + (y+1)x + ay^2 + y - 2$가

x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어지려면

$D = (y+1)^2 - 4(ay^2 + y - 2)$

$= y^2 + 2y + 1 - 4ay^2 - 4y + 8$

$= (1-4a)y^2 - 2y + 9$에서

$\frac{D}{4} = 1 - 9(1-4a) = 0$

$\therefore\ 1 - 9 + 36a = 0$

$\therefore\ a = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

26. 이차방정식 $f(2x+1)=2$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=4$가 성립한다. 이 때, $3f(x)-2=4$의 두 근의 합은?

① 7　　② 8　　③ 9　　④ 10　　⑤ 11

해설

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$f(2x+1)=a(2x+1)^2+b(2x+1)+c=2$

$\therefore a(4x^2+4x+1)+b(2x+1)+c-2=0$

$4ax^2+4ax+a+2bx+b+c-2=0$

$4ax^2+(4a+2b)x+a+b+c-2=0$

따라서 두 근의 합 $\alpha+\beta=\dfrac{-(4a+2b)}{4a}=4$

$\therefore 4a+2b=-16a,\ \ 2b=-20a$이므로

$b=-10a$

$3f(x)-2=4$이므로 $3f(x)=6$

$\therefore f(x)=2\quad \therefore ax^2+bx+c-2=0$에서

두 근의 합 $\alpha'+\beta'=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-10a}{a}=10$

27. 이차항의 계수가 1 인 이차방정식에서 상수항을 1 만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3 만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2 + bx + c = 0$ 이라 하면
$x^2 + bx + (c + 1) = 0$ 의 근은 중근이 된다.
$\therefore\ D = b^2 - 4(c + 1) = 0$
$\therefore\ b^2 = 4c + 4 \cdots\cdots$ ㉠
또, $x^2 + bx + (c - 3) = 0$ 의 두 근은 $\alpha,\ 2\alpha$ 가 된다.
$\therefore\ \alpha + 2\alpha = -b \cdots\cdots$ ㉡
$\therefore\ \alpha \cdot 2\alpha = c - 3 \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $b = \pm 12,\ c = 35$ 이므로
처음 방정식은 $x^2 \pm 12x + 35 = 0$
$\therefore\ x = -5$ 또는 $-7,\quad x = 5$ 또는 7
따라서 (두 근의 제곱의 합)$= (\pm 5)^2 + (\pm 7)^2 = 74$

28. 세 방정식 $x^2+2ax+bc=0$, $x^2+2bx+ca=0$, $x^2+2cx+ab=0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은? (단, a, b, c는 실수)

① 세 방정식은 모두 실근을 갖는다.

② 세 방정식은 모두 허근을 갖는다.

③ 반드시 두 방정식만 실근을 갖는다.

④ 반드시 한 방정식만 실근을 갖는다.

⑤ 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

해설

세 방정식의 판별식을 각각

$\frac{D_1}{4}=a^2-bc$,

$\frac{D_2}{4}=b^2-ca$,

$\frac{D_3}{4}=c^2-ab$라 하면

$\frac{D_1}{4}+\frac{D_2}{4}+\frac{D_3}{4}$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}\ge 0$

따라서, $\frac{D_1}{4}$, $\frac{D_2}{4}$, $\frac{D_3}{4}$ 중 적어도 하나는 0보다 크거나 같다.

곧, 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

29. 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여 두 방정식 $x^2+2ax+b=0$과 $x^2+2bx+a=0$의 두 근의 차가 서로 같을 때, a, b의 관계식은?

① $a+b=0$ ② $a-b-1=0$ ③ $a-b+1=0$
④ $a+b-1=0$ ⑤ $a+b+1=0$

해설

$x^2+2ax+b=0$의 해를 α, β
$x^2+2bx+a=0$의 해를 γ, δ라 하면
$|\alpha-\beta|=|\gamma-\delta|$에서
$(\alpha-\beta)^2=(\gamma-\delta)^2$,
$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta$
$(-2a)^2-4b=(-2b)^2-4a$
$\therefore\ (a-b)(a+b+1)=0$
$a\neq b$이므로 $a+b+1=0$

30. 사차방정식 $x^4 + 2ax^2 + a + 2 = 0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $a < -2$　　② $-2 < a < -1$　　③ $-1 < a < 2$

④ $a > 2$　　⑤ $-1 < a < 0$

해설

$x^2 = t$로 놓으면

$t^2 + 2at + a + 2 = 0$이

서로 다른 양근을 가져야 하므로

(i) $\frac{D}{4} = a^2 - a - 2 > 0 \quad \therefore\ a < -1,\ 2 < a$

(ii) $\alpha + \beta = -2a > 0 \quad \therefore a < 0$

(iii) $\alpha\beta = a + 2 > 0 \quad \therefore\ a > -2$

$\therefore$ (i), (ii), (iii)에서 $-2 < a < -1$