

1. $4x^2 - 3x + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(3\alpha - 2)(3\beta - 2)$ 의 값을 구하면?

㉠ 4 ㉡ 5 ㉢ 6 ㉣ 7 ㉤ 8

해설

근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = \frac{3}{4}, \alpha\beta = \frac{1}{2}$$

$$(3\alpha - 2)(3\beta - 2) = 9\alpha\beta - 6(\alpha + \beta) + 4$$

$$= 9 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot \frac{3}{4} + 4$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 4 = 4$$

2. $a^2 - 3a + 1 = 0$ 일 때, $a^2 - 2a + \frac{3}{a^2 + 1}$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$a^2 - 3a + 1 = 0$ 에서

$$a^2 - 2a + \frac{3}{a^2 + 1} = a - 1 + \frac{3}{3a} = a + \frac{1}{a} - 1$$

한편, $a^2 - 3a + 1 = 0$ 의 양변을 a 로 나누면

$$a - 3 + \frac{1}{a} = 0 \quad \therefore a + \frac{1}{a} = 3$$

$$\therefore (\text{준식}) = \left(a + \frac{1}{a}\right) - 1 = 2$$

3. x, y 에 대한 이차식 $f(x, y) = x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3$ 이 x, y 의 두 일차식으로 인수분해될 때, 실수 k 의 값을 구하면?

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3 = 0$ 의 두 근을 구하면 근의 공식에 의하여

$$x = -(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 - (y^2 + ky - 3)}$$
$$= -(y-1) \pm \sqrt{-(2+k)y + 4} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편, $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이면

$$x^2 + ax + b = (x-\alpha)(x-\beta) \text{ 이고}$$

준식이 x, y 의 일차식으로 인수분해되므로

x 의 두 근 $\textcircled{1}$ 에서 $-(2+k)y + 4$ 가 완전제곱 꼴이 되어야 한다.

따라서 근호 안의 판별식 D 는 0이어야 한다.

$$\therefore D = (2+k)^2 - 4 \cdot 0 \cdot 4 = 0$$
$$2+k = 0$$
$$\therefore k = -2$$

4. 이차항의 계수가 1인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2 + bx + c = 0$ 이라 하면
 $x^2 + bx + (c + 1) = 0$ 의 근은 중근이 된다.
 $\therefore D = b^2 - 4(c + 1) = 0$
 $\therefore b^2 = 4c + 4 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
또, $x^2 + bx + (c - 3) = 0$ 의 두 근은 $\alpha, 2\alpha$ 가 된다.
 $\therefore \alpha + 2\alpha = -b \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\therefore \alpha \cdot 2\alpha = c - 3 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 에서 $b = \pm 12, c = 35$ 이므로
처음 방정식은 $x^2 \pm 12x + 35 = 0$
 $\therefore x = -5$ 또는 $-7, x = 5$ 또는 7
따라서 (두 근의 제곱의 합) $= (\pm 5)^2 + (\pm 7)^2 = 74$

5. 서로 다른 두 실수 a, b 에 대하여 두 방정식 $x^2 + 2ax + b = 0$ 과 $x^2 + 2bx + a = 0$ 의 두 근의 차가 서로 같을 때, a, b 의 관계식은?

① $a + b = 0$ ② $a - b - 1 = 0$ ③ $a - b + 1 = 0$

④ $a + b - 1 = 0$ ⑤ $a + b + 1 = 0$

해설

$x^2 + 2ax + b = 0$ 의 해를 α, β
 $x^2 + 2bx + a = 0$ 의 해를 γ, δ 라 하면
 $|\alpha - \beta| = |\gamma - \delta|$ 에서
 $(\alpha - \beta)^2 = (\gamma - \delta)^2$,
 $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta$
 $(-2a)^2 - 4b = (-2b)^2 - 4a$
 $\therefore (a - b)(a + b + 1) = 0$
 $a \neq b$ 이므로 $a + b + 1 = 0$