

1. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 64$

해설

정의역과 공역의 개수가 다르므로
일대일 대응은 없고, 정의역의 개수가 A
공역의 개수가 B 일 때 함수 개수는 B^A 이다.
 $\therefore 4^3 = 64$
 $\therefore a + b = 64$

2. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 f 가 $f : x \rightarrow x + 1$ 로 주어질 때, $f^{2006}(2)$ 의 값은 얼마인가? (단, $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$, n 은 자연수)

① 2002 ② 2004 ③ 2006 ④ 2008 ⑤ 2010

해설

$$f^2(x) = f(f(x)) = (x + 1) + 1 = x + 2$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = (x + 2) + 1 = x + 3$$

$$f^4(x) = f(f^3(x)) = (x + 3) + 1 = x + 4$$

$\vdots$

이상에서 $f^n(x) = x + n$ 이므로

$$f^{2006}(x) = x + 2006$$

$$\therefore f^{2006}(2) = 2 + 2006 = 2008$$

3. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{y|y \text{는 정수}\}$ 에 대하여 두 함수 f, g 를 X 에서 Y 로의 함수로 정의한다. $f(x) = x - 1$, $g(x) = ax^2 + bx + c$ 라 할 때, $f = g$ 가 되도록 하는 상수 a, b, c 의 곱 abc 를 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f = g$ 에서
 $f(-1) = g(-1)$, $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$ 이므로
 $f(-1) = g(-1)$ 에서 $-2 = a - b + c \cdots \text{㉠}$
 $f(0) = g(0)$ 에서 $-1 = c \cdots \text{㉡}$
 $f(1) = g(1)$ 에서 $0 = a + b + c \cdots \text{㉢}$
㉠, ㉡, ㉢에서 $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$
 $\therefore abc = 0$

4. 임의의 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 이면 $f(x)$ 를 우함수, $f(-x) = -f(x)$ 이면 $f(x)$ 를 기함수라 한다. 다음은 「모든 함수는 우함수와 기함수의 합으로 나타낼 수 있다.」라는 명제의 참·거짓을 밝히는 과정이다. 다음 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열하면?

보기

임의의 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 라고 놓고 $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 라 하면 $g(x)$ 는 [(가)] 이고 $h(x)$ 는 [(나)] 이다. 따라서 주어진 명제는 [(다)]이다.

- ① 기함수, 우함수, 참 ② 우함수, 기함수, 참
③ 우함수, 우함수, 거짓 ④ 기함수, 기함수, 거짓
⑤ 우함수, 기함수, 거짓

해설

$$g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x) \text{ 이므로}$$

$g(x)$ 는 우함수 ... (가)

$$h(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

$$= -h(x) \text{ 이므로}$$

$h(x)$ 는 기함수 ... (나)

따라서, 임의의 함수 $f(x)$ 를

우함수와 기함수의 합으로 나타내었으므로

주어진 명제는 참이다. ... (다)

5. $f\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) = 3x-1$ 을 만족하는 $f(x)$ 에 대하여, $f^{-1}(11)$ 의 값은?

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 0

해설

$$f^{-1}(3x-1) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \text{ 이므로}$$

$$3x-1=11 \text{ 에서 } x=4$$

$$\therefore f^{-1}(11) = \frac{1+\sqrt{4}}{1-\sqrt{4}} \\ = -3$$