1. $\frac{k}{3}(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$ 와 같은 것은?

① $\frac{1}{6}(k+1)(k+3)(k+4)$ ② $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$
③ $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$ ④ $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)(k+3)$
⑤ $\frac{1}{4}(k+1)(2k+1)(3k+2)$

해설

$(k+1)(k+2)=\frac{3}{3}(k+1)(k+2)$ 이므로

공통인수 $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)$ 로 묶으면

(준 식)$=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$

2. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해하였더니, $(x+ay)(x-by+c)$가 되었다. 이 때, a, b, c를 순서대로 쓴 것은?

① $-1,\ 0,\ 1$　　② $-1,\ 1,\ 2$　　③ $-2,\ -1,\ 1$

④ $-1,\ -1,\ -2$　　⑤ $-1,\ 2$

해설

$$\begin{aligned} x^2-2x-y^2+2y &= (x+y)(x-y)-2(x-y) \\ &= (x-y)(x+y-2) \end{aligned}$$

$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ c=-2$

3. $(x^2+x)(x^2+x+1)-6$을 인수분해하면?

① $(x-1)(x+2)(x^2+x+3)$ ② $(x-1)(x+2)(x^2+x-3)$
③ $(x-2)(x+1)(x^2+x+3)$ ④ $(x-1)(x+2)(x^2-x+3)$
⑤ $(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$

해설

$x^2+x=X$라 하자.

(준식) $=X(X+1)-6$

$=X^2+X-6$

$=(X+3)(X-2)$

$=(x^2+x+3)(x^2+x-2)$

$=(x-1)(x+2)(x^2+x+3)$

4. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해 하였더니 $(x+ay)(x-by+c)$가 된다고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

x^2-2x-y^2+2y

$=(x^2-y^2)-2(x-y)$

$=(x+y-2)(x-y)$

$=(x+ay)(x-by+c)$

계수를 비교하면

$a=-1, b=-1, c=-2$

$\therefore a+b+c=-1-1-2=-4$

5. 등식 $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x+a)(x+b)(x+c)$일 때, $a+b+c$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

조립제법을 사용한다

1	1	4	1	-6
		1	5	6
-2	1	5	6	0
		-2	-6	
-3	1	3	0	
		-3		
	1	0		

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x+2)(x+3)$

$\therefore a+b+c = 4$

6. $x^3-6x^2+11x-6$을 인수분해 하면?

① $(x+1)(x-2)(x+3)$
② $(x-1)(x+2)(x+3)$
③ $(x-1)(x-2)(x-3)$
④ $(x+1)(x+2)(x-3)$
⑤ $(x-1)(x-2)(x+3)$

해설

인수정리를 이용하면
$f(1)=0,\ f(2)=0,\ f(3)=0$이므로
(준식)$=(x-1)(x-2)(x-3)$

7. 두 다항식 $2x^2 + 2x - 4$와 $4x^3 - 4$에 관한 설명이다. 옳지 않은 것을 고르면?

① 두 다항식은 $(x-1)$로 나누어 떨어지므로, $(x-1)$은 두 다항식의 공약수이다.

② 두 다항식은 공약수가 있으므로 서로소가 아니다.

③ $4(x-1)^3(x+2)^2(x^2+x+1)$은 두 다항식의 공배수이다.

④ 두 다항식의 최대공약수는 $2(x-1)$이다.

⑤ 두 다항식의 최소공배수는 $(x+2)(x-1)^2(x^2+x+1)$이다.

해설

$2x^2 + 2x - 4 = 2(x-1)(x+2)$
$4x^3 - 4 = 4(x-1)(x^2+x+1)$
최대공약수 : $2(x-1)$
최소공배수 : $4(x-1)(x+2)(x^2+x+1)$

8. 두 다항식 $3x^4-2x^3-9x^2+4$, $3x^3-3x^2-6x$의 최대공약수를 구하면?

① $(x-1)(x-2)$　② $(x+1)(x+2)$　③ $(x+1)(x-2)$
④ $(x-1)(x-2)$　⑤ $(x+1)(x-1)$

해설

$3x^4-2x^3-9x^2+4$
$=(x+1)(x-2)(x+1)(3x-2)$
$3x^3-3x^2-6x=3x(x-2)(x+1)$
$\therefore$ 최대공약수 : $(x-2)(x+1)$

9. 두 다항식 x^3+1, x^3+2x^2-5x-6의 최대공약수를 구하면?

① x ② $x+1$ ③ $x+2$ ④ $x-1$ ⑤ $x-2$

해설

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

$x^3+2x^2-5x-6=(x-2)(x+1)(x+3)$

따라서 최대공약수는 $x+1$

10. $(x^2+x)(x^2+x-8)+12$를 인수분해 할 때, 다음 중 인수가 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $x-1$ ② $x+1$ ③ $x-2$ ④ $x+2$ ⑤ $x+3$

해설

$x^2+x=A$로 놓으면 주어진 식은

$$A(A-8)+12=A^2-8A+12$$
$$=(A-2)(A-6)$$

$$\therefore(\text{준식})=(x^2+x-2)(x^2+x-6)$$
$$=(x-1)(x+2)(x-2)(x+3)$$

11. $(x^2-x+1)(x^2-x-3)-5$를 인수분해하면 $(x^2+ax+b)(x^2+cx+2)$일 때, 상수 $a,\ b,\ c$의 합 $a+b+c$의 값은?

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

해설

x^2-x를 X로 치환하면

$(x^2-x+1)(x^2-x-3)-5$

$=(X+1)(X-3)-5$

$=X^2-2X-3-5$

$=X^2-2X-8$

$=(X-4)(X+2)$

$=(x^2-x-4)(x^2-x+2)$

따라서, $a=-1,\ b=-4,\ c=-1$이므로

$a+b+c=-1-4-1=-6$

12. 다음<보기>중 다항식 x^4-7x^2+9을 인수분해 할 때, 그 인수로 알맞은 것을 모두 고르면?

<보기>

㉠ x^2-1	㉡ x^2-x-1
㉢ x^2-x-3	㉣ x^2+x-3

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉢　③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉢　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$$\begin{aligned} x^4-7x^2+9 &= x^4-6x^2+9-x^2 \\ &= (x^2-3)^2-x^2 \\ &= (x^2-x-3)(x^2+x-3) \end{aligned}$$

$\therefore$ 인수 : (x^2-x-3), (x^2+x-3)

13. $2x^2+2y^2+5xy-x+y-1$의 인수인 것은?

① $2x+y+1$ ② $2x+y-1$ ③ $2x-y-1$
④ $x+2y+1$ ⑤ $x-2y-1$

해설

$2x^2+2y^2+5xy-x+y-1$
$=2x^2+(5y-1)x+(y+1)(2y-1)$
$=(x+2y-1)(2x+y+1)$

14. $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$을 인수분해하면?

① $-(a-b)(b-c)(c-a)$　　② $(a-b)(b-c)(a-c)$

③ $-(b-a)(b-c)(c-a)$　　④ $(a-b)(b-c)(c-a)$

⑤ $(a-b)(b-c)(c+a)$

해설

(준식) $= (c-b)a^2 + (b^2 - c^2)a + bc(c-b)$

$= (c-b)\{a^2 - (c+b)a + bc\}$

$= (c-b)(a-b)(a-c)$

$= (a-b)(b-c)(c-a)$

15. $[a,\ b,\ c] = a(b^2 - c^2)$ 일 때, $[a,\ b,\ c] + [b,\ c,\ a] + [c,\ a,\ b]$ 의 인수인 것은?

① $a-b$ ② $b+c$ ③ $c+a$

④ $a+b+c$ ⑤ abc

해설

$[a,\ b,\ c] + [b,\ c,\ a] + [c,\ a,\ b]$
$= a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$
$= ab^2 - ac^2 + bc^2 - ba^2 + ca^2 - cb^2$
$= a^2(c-b) - a(c^2 - b^2) + bc(c-b)$
$= (c-b)\{a^2 - a(c+b) + bc\}$
$= (c-b)(a-b)(a-c)$

16. 다음 식을 인수분해하면 $x^4 - 3x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 + axy + by^2)(x^2 + cxy + dy^2)$ 일 때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하여라. (a, b, c, d는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 7x^2y^2 \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - 7x^2y^2 \\ &= (x^2 + \sqrt{7}xy + 2y^2)(x^2 - \sqrt{7}xy + 2y^2)\end{aligned}$$

$\therefore\ a+b+c+d = 4$

17. 다음 두 다항식 A, B의 최대공약수를 G, 최소공배수를 L이라 하자. $\dfrac{L}{G} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$일 때, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$를 구하면?

$$A = (2x-1)(x+1)^2$$
$$B = (2x-1)^2(x+1)(x-2)$$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$A = (2x-1)(x+1)^2$
$B = (2x-1)^2(x+1)(x-2)$이므로
$G = (2x-1)(x+1)$
$L = (2x-1)^2(x+1)^2(x-2)$
$\dfrac{L}{G} = (2x-1)(x+1)(x-2)$
또 각 계수들의 합은 $x = 1$일 때이므로
$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 \times 2 \times (-1) = -2$

18. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식 A, B의 최대공약수가 $x+2$이고 최소공배수가 x^3+x^2-4x-4이다. $A+B=ax^2+bx+c$를 만족하는 상수 $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3+x^2-4x-4=(x+2)(x+1)(x-2)$

두 다항식은 각각 $(x+2)(x+1), (x+2)(x-2)$

$A+B=(x+2)(x-2)+(x+2)(x+1)$

$=2x^2+3x-2=ax^2+bx+c$

$\therefore a=2, b=3, c=-2$

$\therefore\ a+b+c=3$

19. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2 - 5x - 3$이고 최소공배수가 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$일 때, 두 다항식의 최대공약수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $x - 3$

해설

두 다항식을 A, B라고 하면
$A + B = (a + b)G$, $L = abG$,
즉, 최대공약수는 두 식의 합과 최소공배수의 공약수이다.
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 1)(x + 2)$
$2x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(2x + 1)$
$\therefore\ G = x - 3$

20. 최고차항의 계수가 1인 두 이차다항식의 최소공배수가 x^3-2x^2-5x+6 이고, 최대공약수가 $x+2$일 때, 두 다항식의 합은?

① $2x^2+x-6$　② $2x^2-2x+3$　③ $2x^2-3x+4$
④ $2x^2-6$　⑤ $2x^2-8$

해설

두 다항식을 $A=aG$, $B=bG$ (a, b 는 서로소)라고 하면
$L=abG=x^3-2x^2-5x+6$
이 때, 최대공약수 G 가 $x+2$ 이므로 조립제법을 하여 L 을 인수분해하면
$\therefore\ L=(x^3-4x+3)(x+2)$
$\quad=(x-1)(x-3)(x+2)$
따라서, 구하는 두 이차 다항식은
$(x-1)(x+2)$ 와 $(x-3)(x+2)$,
즉 x^2+x-2 , x^2-x-6 이다.
따라서, 두 다항식의 합은 $2x^2-8$ 이다.

21. 최고차항의 계수가 1 인 두 이차식의 최대공약수가 $x+3$ 이고 최소공배수가 x^3+x^2-6x 일 때, 두 이차식의 합은?

① $(x+1)(x-2)$
② $(x+2)(x+4)$
③ $2(x-1)(x+3)$
④ $2(x-2)(x-4)$
⑤ $2(x+1)(x-4)$

해설

최대공약수가 $x+3$ 이므로 두 이차식을
$a(x+3)$, $b(x+3)$ (a, b 는 서로소)라 하고
최소공배수를 $f(x)=x^3+x^2-6x$ 라 하면
$f(x)=x(x^2+x-6)=x(x+3)(x-2)$
따라서 두 다항식은
$x(x+3)$, $(x-2)(x+3)$ 이므로
구하는 두 다항식의 합은
$$x(x+3)+(x-2)(x+3)=(x+3)(2x-2)$$
$$=2(x-1)(x+3)$$

22. 1999 개의 다항식 x^2-2x-1, x^2-2x-2, $\cdots$, $x^2-2x-1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

① 43 개 ② 44 개 ③ 45 개 ④ 46 개 ⑤ 47 개

해설

$x^2-2x-n=(x+a)(x-b)$ (a, b 는 자연수) 라 하면 ($1 \le n \le 1999$ 인 자연수)

$ab=n$, $a=b-2$

$\therefore n=1\cdot 3,\ 2\cdot 4,\ 3\cdot 5,\ \cdots,\ 43\cdot 45(=1935)$ 의 43 개

23. x^4-11x^2+1 이 $(x^2+ax+b)(x^2+3x+b)$로 인수분해될 때, $a+b$의 값은?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

$$\begin{aligned} x^4-11x^2+1 &= (x^2-1)^2-9x^2 \\ &= (x^2-1)^2-(3x)^2 \\ &= (x^2-3x-1)(x^2+3x-1) \\ &= (x^2+ax+b)(x^2+3x+b) \end{aligned}$$

$\therefore\ a=-3,\ b=-1$

$\therefore\ a+b=-4$

24. 다음 보기 중 $ab(b-a)+ac(c-a)+bc(2a-b-c)$의 인수인 것을 모두 고르면?

㉠ $a-b$	㉡ $b+c$	㉢ $a-c$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ab(b-a)+ac(c-a)+bc(2a-b-c)$
$=ab^2-a^2b+ac^2-a^2c+2abc-b^2c-bc^2$
$=-(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a-bc(b+c)$
$=-(b+c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$=-(b+c)(a-b)(a-c)$
$=(a-b)(b+c)(c-a)$

25. 0이 아닌 세 수가 있다. 이들의 합은 0, 역수의 합은 $\frac{3}{2}$, 제곱의 합은 1일 때, 이들 세 수의 세제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 수를 x, y, z라 하면 주어진 조건으로부터

$x+y+z=0 \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \cdots\cdots$ ㉡

$x^2+y^2+z^2=1 \cdots\cdots$ ㉢

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$이므로

㉠, ㉢에서 $0^2=1+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xy+yz+zx=-\frac{1}{2} \cdots\cdots$ ㉣

㉡에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{3}{2}$이므로

$3xyz=2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xyz=-\frac{1}{3}$

또, $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

㉠에서 $x+y+z=0$이므로

$x^3+y^3+z^3=3xyz=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

26. $\dfrac{2^{40}-2^{35}-2^5+1}{2^{35}-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 31

해설

$2^5 = x$라 두면

$$\begin{aligned}\frac{2^{40}-2^{35}-2^5+1}{2^{35}-1} &= \frac{x^8-x^7-x+1}{x^7-1}\\ &= \frac{(x-1)(x^7-1)}{x^7-1}\\ &= x-1 = 2^5-1 = 31\end{aligned}$$

27. 두 다항식 $A = x^3 + x^2 + ax - 2$, $B = x^3 - x^2 - ax + 4$의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 a의 값은?

① 2　　② 1　　③ 0　　④ -1　　⑤ -2

해설

최대공약수를 $x - \alpha$라 하자.
나머지정리에 의해 $\alpha^3 + \alpha^2 + a\alpha - 2 = 0$
$\alpha^3 - \alpha^2 - a\alpha + 4 = 0$
두 식을 더하면 $2\alpha^3 = -2$,　$\alpha = -1$
이제 $\alpha = -1$ 을 다시 A 식에 대입하면
$-1 + (-1)^2 - a - 2 = 0$　$\therefore a = -2$

28. 세 변의 길이가 x, y, z인 삼각형 ABC에서 등식 $(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4=0$이 성립할 때, $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인가?

① $z=x$인 이등변삼각형, 또는 y가 빗변인 직각삼각형

② $y=z$인 이등변삼각형, 또는 x가 빗변인 직각삼각형

③ x가 빗변인 직각삼각형

④ y가 빗변인 직각삼각형

⑤ $x=y$인 이등변 삼각형, 또는 z가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)(x+y)^2(x^2+y^2)-2(x-y)(x^2+xy+y^2)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)\{(x^2+2xy+y^2)(x^2+y^2)-2(x^2+xy+y^2)z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+x^2y^2+2x^3y+2xy^3+x^2y^2+y^4-2x^2z^2-2xyz^2-2y^2z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)\{(x^2+y^2-z^2)^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)(x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2-z^2+2xy)=0$
$\therefore$ $x=y$인 이등변 삼각형 또는 z가 빗변인 직각 삼각형
($\because$ $x^2+y^2-z^2+2xy=(x+y)^2-z^2$에서 삼각형의 변인 x, y, z는 $x+y\neq z$)

29. $a-b=2-\sqrt{3}$, $b-c=2+\sqrt{3}$인 세 수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$의 값은?

① 4　　② 3　　③ 1　　④ −2　　⑤ −3

해설

$a-b=2-\sqrt{3}$ ……㉠
$b-c=2+\sqrt{3}$ ……㉡
㉠+㉡을 계산하면 $a-c=4$
$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$=a^2(b-c)+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$
$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+b^2c-c^2b$
$=a^2(b-c)-a(b+c)(b-c)+bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$
$=(b-c)(a-b)(a-c)$
$=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\cdot 4=4$

30. 두 다항식 A, B 에 대하여 A 를 B 로 나눈 몫을 Q_1 , 나머지를 R_1 이라 할 때, B 는 R_1 로 나누어 떨어지고 그 몫은 Q_2 이다. 이 때, A, B 의 최소공배수는? (단, A 의 차수가 B 의 차수보다 크다.)

① AB　　② $\dfrac{AB}{R_1}$　　③ $\dfrac{AB}{Q_1}$

④ $\dfrac{AB}{Q_2}$　　⑤ $\dfrac{AB}{Q_1Q_2}$

해설

주어진 조건을 식으로 나타내면

$A = BQ_1 + R_1 \cdots$ ㉠

$B = R_1Q_2 \cdots$ ㉡

유클리드의 호제법에 의하여

A 와 B 의 최대공약수는 B 와 R_1 의 최대공약수와 같다.

㉠, ㉡에서 B 와 R_1 의 최대공약수는 R_1 이므로

A 와 B 의 최대공약수는 R_1 이다.

따라서, A, B 의 최소공배수는 $\dfrac{AB}{R_1}$