1. 다음 중 명제가 아닌 것은?

① 한라산은 제주도에 있다.
② 독도는 섬이 아니다.
③ 19 는 짝수이다.
④ 수학 책은 두껍다.
⑤ 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 $180°$ 이다.

해설
참인 명제 : ①, ⑤
거짓인 명제 : ②, ③
④의 경우 두껍다는 기준이 모호하므로 명제가 아니다.

2. 세 수 $A = \sqrt{6} + \sqrt{7}$, $B = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}$, $C = \sqrt{3} + \sqrt{10}$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$　② $A < C < B$　③ $B < A < C$
④ $C < A < B$　⑤ $C < B < A$

해설

$A > 0,\ B > 0,\ C > 0$ 이므로
A^2, B^2, C^2 의 대소를 비교한 것과 같다.
$A^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 13 + 2\sqrt{42}$
$B^2 = (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 = 13 + 2\sqrt{40}$
$C^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{10})^2 = 13 + 2\sqrt{30}$
이므로 $A^2 > B^2 > C^2$ 이다.
따라서 $A > B > C$

3. 양수 a, b에 대하여 $\dfrac{4a+9b}{6\sqrt{ab}}$ 의 최솟값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$\dfrac{4a+9b}{6\sqrt{ab}}=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{4\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\dfrac{9\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)$

$\geq \dfrac{1}{6}\times 2\times \sqrt{4\times 9}=2$

해설

4. 조건 $x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은?

① $x < 1$ 그리고 $x > 2$
② $x \leq 1$ 또는 $x \geq 2$
③ $x \geq 1$ 또는 $x \leq 2$
④ $x \leq 1$ 그리고 $x \geq 2$
⑤ $1 \leq x \leq 2$

해설

$x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은 $1 \leq x \leq 2$ 이다.

5. 다음 중에서 참인 명제는? (단, 문자는 실수이다.)

① $x^2 = 1$이면 $x^3 = 1$이다.

② $\sqrt{(-3)^2} = -3$

③ $|x| > 0$이면 $x > 0$이다.

④ $|x+y| = |x-y|$ 이면 $xy = 0$이다.

⑤ 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

해설

① $x = -1$이면 $x^2 = 1$이지만 $x^3 = -1$ 이므로 거짓인 명제이다.
② $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ 이므로 거짓인 명제이다.
③ $x = -2$이면 $|-2| = 2 > 0$ 이지만 $-2 < 0$이므로 거짓인 명제이다.
④ $|x+y| = |x-y|$의 양변을 제곱하면 $(x+y)^2 = (x-y)^2 \leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 \leftrightarrow xy = 0$ 따라서, 참인 명제이다.
⑤ 등변사다리꼴은 대각선의 길이가 같지만 직사각형은 아니다. 따라서, 거짓인 명제이다.

6. 다음은 명제에 대한 설명이다. 옳은 것은?

① 어떤 명제가 참이면 그 역도 반드시 참이다.
② 어떤 명제가 참이면 그 명제의 대우도 참이다.
③ 어떤 명제의 역, 대우는 참, 거짓이 항상 일치한다.
④ 어떤 명제가 참이라고 해서 그 대우가 반드시 참인 것은 아니다.
⑤ 어떤 명제의 역의 역은 대우이다.

해설
명제가 참이면 그 명제의 대우도 항상 참이고, 명제가 거짓이면 그 명제의 대우도 항상 거짓이다.

7. 다음 명제의 대우로 알맞은 것은?

'$a+b$가 홀수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.'

① $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.
② a, b 모두 짝수이거나 또는 홀수이면 $a+b$ 가 짝수이다.
③ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$가 짝수이다.
④ a, b중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이면, $a+b$가 홀수이다.
⑤ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$ 가 홀수이다.

해설

대우 : $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.

8. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

- $1 < x \le 3$ 은 $x > -2$ 이기 위한 (가) 조건이다.
- $2x = 4$ 는 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 이기 위한 (나) 조건이다.

① 필요, 필요
② 필요, 충분
③ 충분, 충분
④ 충분, 필요
⑤ 충분, 필요충분

해설

$P = \{x \mid 1 < x \le 3\}$,
$Q = \{x \mid x > -2\}$ 라고 하면
$P \subset Q$, $\quad \therefore$ 충분조건
$R = \{x \mid 2x = 4\} = \{2\}$,
$S = \left\{x \mid x^2 - 4x + 4 = 0\right\} = \{2\}$ 라고 하면
$R = S$, $\quad \therefore$ 필요충분조건

9. 다음 중 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은?(a, x, y, z는 모두 실수)

① $p : a < b$, $q : |a| < |b|$

② $p : 2x + 3 = 5$, $q : x^2 - 2x + 1 = 0$

③ $p : a > 3$, $q : a^2 > 9$

④ $p : x > 0$ 이고 $y > 0$, $q : x + y > 0$

⑤ $p : xy = yz$, $q : x = z$

해설

주어진 명제도 참이고 역도 참인 것을 고른다.
① 주어진 명제, 역 모두 거짓이다.
② p, q를 만족하는 값이 모두 $x = 1$이므로 필요충분조건이다.
③, ④ 주어진 명제만 참이고 역은 성립하지 않는다. $\therefore$ p는 q이기 위한 충분조건이다.
⑤ 주어진 명제는 거짓이고 역은 참이다.
$\therefore$ p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

10. n이 자연수 일 때, 2^{10n}, 1000^n 의 대소를 비교하면?

① $2^{10n} < 1000^n$ ② $2^{10n} \le 1000^n$ ③ $2^{10n} > 1000^n$
④ $2^{10n} \ge 1000^n$ ⑤ $2^{10n} = 1000^n$

해설

$2^{10n} > 0,\ 1000^n > 0$ 이고, n이 자연수이므로

$\dfrac{2^{10n}}{1000^n} = \dfrac{(2^{10})^n}{1000^n} = \left(\dfrac{2^{10}}{1000}\right)^n = \left(\dfrac{1024}{1000}\right)^n > 1$

$\therefore 2^{10n} > 1000^n$

11. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식$|a| + |b| \geq |a + b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 <u>않은</u> 성질을 고르면?

증명

$(|a| + |b|)^2 - (|a + b|)^2$
$= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2$
$= \ a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2$
$= \ 2(|ab| - ab)\ 0$
$\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (|a + b|)^2$
$\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$

① $|a| \geq a$

② $a \geq b$, $b \geq c$ 이면 $a \geq c$

③ $|a|^2 = a^2$

④ $a - b \geq 0$ 이면 $a \geq b$

⑤ $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

해설

$(|a| + |b|)^2 - (|a + b|)^2$
$= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2$ (③이 쓰임)
$= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2$
$= 2(|ab| - ab) \geq 0$ (①이 쓰임)
$\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (|a + b|)^2$ (④가 쓰임)
$\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$ (⑤가 쓰임)
따라서, ②는 쓰이지 않았다.

12. 실수 x, y에 대하여 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$이 성립할 때, $x+y$의 최댓값은?

① $\sqrt{7}$ ② 3 ③ $\sqrt{13}$ ④ 5 ⑤ 12

해설

코시-슈바르츠부등식에 의해서

$(2^2+3^2)\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2\right\} \geq (x+y)^2$

$13 \geq (x+y)^2$ 이므로

$-\sqrt{13} \leq x+y \leq \sqrt{13}$

$\therefore x+y$의 최댓값은 $\sqrt{13}$

13. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하고, $P \cup Q = P$ 일 때, 다음 중 참인 명제는?

① $p \to q$ ② $q \to p$ ③ $\sim p \to q$
④ $q \to \sim p$ ⑤ $\sim q \to \sim p$

해설

$P \cup Q = P$ 이므로 $Q \subset P$ 이다. 따라서, $q \Rightarrow p$

14. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 원소 x, y 에 대하여 다음 명제 중 거짓인 것은?

① 어떤 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 = 5$ 이다.

② 어떤 x, y 에 대하여 $x + y \leq 5$ 이다.

③ 모든 x 에 대하여 $x - 1 < 5$ 이다.

④ 어떤 x 에 대하여 $x^2 - 1 \leq 0$ 이다.

⑤ 모든 x 에 대하여 $|x - x^2| \geq 5$ 이다.

해설

⑤ (반례) $x = 1$ 인 경우 $|1 - 1| = 0$ 이므로 거짓이다.

15. 명제 '모든 실수 x 에 대하여 $x^2+4 \geq k$ 이다.' 는 참이고, '어떤 실수 x 에 대하여 $x^2+k \leq 1$ 이다.' 는 거짓일 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-4 \leq k \leq -1$ ② $1 \leq k \leq 4$ ③ $-1 \leq k < 1$
④ $1 < k \leq 4$ ⑤ $-4 \leq k \leq 1$

해설

모든 실수 x 에 대하여 $x^2+4 \geq k$ 가 참이므로 $k \leq 4$
어떤 실수 x 에 대하여 $x^2+k \leq 1$ 이 거짓이므로 $k > 1$
$\therefore\ 1 < k \leq 4$

16. 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, $p \Rightarrow q$로 나타내기로 한다. 명제 p, q, r, s가 다음의 조건을 만족할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

㉠ $p \Rightarrow q$	㉡ $\sim r \Rightarrow \sim q$
㉢ $s \Rightarrow p$	㉣ $\sim s \Rightarrow \sim q$

① $s \Rightarrow p$ ② $p \Rightarrow r$ ③ $r \Rightarrow s$
④ $q \Rightarrow p$ ⑤ $p \Rightarrow s$

해설

네 명제 p, q, r, s를 정리하면
$p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, s \Rightarrow p, q \Rightarrow s$
즉, $p \Rightarrow q \Rightarrow r, p \Rightarrow q \Rightarrow s$ 이므로
옳지 않은 것은 ③ 이다.

17. $\{(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} - \mathrm{B})\} \cap B = A$ 가 성립하기 위한 필요충분조건으로 알맞은 것은?

① $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}^c = \varnothing$ ② $\mathrm{B} \cap \mathrm{A}^c = \varnothing$ ③ $\mathrm{A} = \mathrm{B}$
④ $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ ⑤ $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A}$

해설

$\{(A \cap B) \cup (A - B)\} \cap B$
$= \{(A \cap B) \cup (A \cap B^c)\} \cap B$
$= \{A \cap (B \cup B^c)\} \cap B$
$= A \cap B = A$
$\therefore A \subset B$이므로 $A \cap B^c = \varnothing$이면 $A \subset B$이므로 필요충분조건은 ①이다.

18. 네 조건 $p,\ q,\ r,\ s$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, r은 q 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 s 이기 위한 충분조건일 때, 다음 중 옳지 않은 것은 ?

① r은 p이기 위한 충분조건

② s는 r이기 위한 필요충분조건

③ r은 q이기 위한 필요충분조건

④ s는 p 이기 위한 필요조건

⑤ s는 q이기 위한 필요충분조건

해설

① $r \rightarrow p$
② $s \leftrightarrow r,\ r \leftrightarrow s$
③ $r \leftrightarrow q,\ q \leftrightarrow r$
④ $s \rightarrow p$
⑤ $s \leftrightarrow q,\ q \leftrightarrow s$

19. 두 조건 p, q가 p : $|x| < a$, q : $|x-1| \geq 3$과 같이 주어져 있다. 명제 $\sim p \rightarrow q$가 참일 때, 양수 a의 범위를 구하면?

① $0 < a \leq 4$ ② $a > 4$ ③ $a \geq 4$

④ $a > 2$ ⑤ $2 \leq a \leq 4$

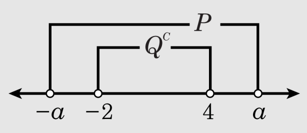
해설

$\sim p \rightarrow q \Rightarrow \sim q \rightarrow p \Rightarrow Q^c \subset P$

$P = \{x | -a < x < a\}$

$Q = \{x | x \leq -2$ 또는 $x \geq 4\}$

$Q^c = \{x | -2 < x < 4\}$



$-a \leq -2 \rightarrow a \geq 2$, $a \geq 4$

$\therefore a \geq 4$

20. 다음은 자연수 n 에 대하여 명제 'n^2 이 3 의 배수이면 n 도 3 의 배수이다.' 를 증명한 것이다.

> 주어진 명제의 대우를 구하면 'n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 $\boxed{(가)}$' 이다. n 이 3 의 배수가 아니므로 $n = 3m \pm \boxed{(나)}$ (m 은 자연수) 에서 $n^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3\left(3m^2 \pm 2m\right) + 1$
> 따라서, $3m^2 \pm 2m$ 이 $\boxed{(다)}$ 이므로 n^2 은 $\boxed{(라)}$ 그러므로 대우가 $\boxed{(마)}$이므로 주어진 명제도 $\boxed{(마)}$이다.

위의 과정에서 빈칸에 들어갈 수나 식이 잘못 연결된 것은?

① (가) 3 의 배수가 아니다.　② (나) 1
③ (다) 자연수　④ (라) 3 의 배수이다.
⑤ (마) 참

해설

주어진 명제의 대우는 'n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 $\boxed{\text{3 의 배수가 아니다}}$' 이다. n 이 3 의 배수가 아니므로 $n = 3m \pm \boxed{1}$ (m 은 자연수) 에서 $n^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3\left(3m^2 \pm 2m\right) + 1$
따라서, $3m^2 \pm 2m$ 이 $\boxed{\text{자연수}}$이므로 n^2 은 $\boxed{\text{3 의 배수가 아니다.}}$
그러므로 대우가 $\boxed{\text{참}}$이므로 주어진 명제도 $\boxed{\text{참}}$이다.