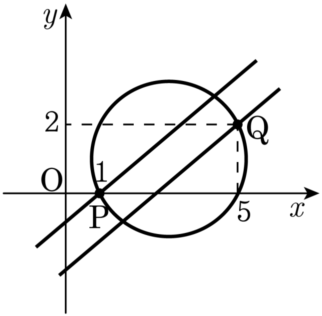
1. 다음 그림과 같이 좌표평면에서 평행한 두 직선에 의해 원의 넓이가 3등분되었다. 원과 직선의 교점 P, Q의 좌표가 각각 $(1, 0)$, $(5, 2)$이고, 원의 반지름의 길이가 r일 때, r^2의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

평행한 두 직선에 의하여 원의 넓이가 3등분되었으므로 그림에서 두 점 P, Q는 원의 지름의 양 끝점이다.
따라서 구하는 원의 중심은 $\overline{PQ}$의 중점 C(3, 1)이므로,

$r^2 = \overline{PC}^2 = (3-1)^2 + (1-0)^2 = 5$ 이다.

2. 다음 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=x+5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

3. 점 $(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3,\ -1)$을 지나고 접선의 기울기를 m이라고 하면

접선은 $y+1=m(x-3)\cdots$①

따라서 원의 중심$(0,0)$에서 직선

$mx-y-3m-1=0$과의 거리가

원의 반지름 $\sqrt{5}$와 같다.

$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$, $|-3m-1|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$9m^2+6m+1=5m^2+5$, $4m^2+6m-4=0$

따라서, 기울기 $m=\frac{1}{2},-2$

여기서 기울기가 음수인 -2를 ①에 대입하면

$y=-2x+5$

따라서 y절편은 5이다.

4. 좌표평면 위의 두 점 $A(8,0)$, $B(0,6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 일 때, 세 상수 a,b,c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

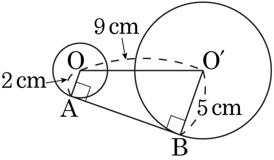
▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle AOB = 90°$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.
$\overline{AB}=10$ 이고 원의 중심은 $C(4,3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x-4)^2+(y-3)^2=5^2$
이 식을 정리하면 $x^2+y^2-8x-6y=0$
$a=-8,\ b=-6,\ c=0$
$\therefore abc=0$

5. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 2 cm, 5 cm 인 두 원 O, O′ 의 중심 사이의 거리가 9 cm 일 때, 공통외접선 $\overline{AB}$ 의 길이는?



① $6\sqrt{2}$ cm ② 8 cm ③ $5\sqrt{2}$ cm

④ 7 cm ⑤ $4\sqrt{3}$ cm

해설

다음 그림에서 점 O 에서 $\overline{BO'}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\overline{AO} = \overline{BH}$

$\therefore \overline{O'H} = 5 - 2 = 3$

따라서 $\triangle OHO'$ 에서

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AB} = \overline{OH} = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2}$ cm