

1. 등식 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-14x} = 81^{3x+1}$ 이 성립하도록 x 값을 정할 때, 다음에서 x 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

양변의 밑이 3이 되도록 바꾸면,

$$(3^{-1})^{2-14x} = (3^4)^{3x+1}$$

$$3^{-2+14x} = 3^{12x+4}$$

이므로 $-2 + 14x = 12x + 4$ 이다.

따라서 $x = 3$ 이다.

2. 두 점 $\left(\frac{1}{2}a + 7, 4\right)$, $\left(-\frac{1}{3}a - 8, 1\right)$ 을 지나는 직선이 y 축에 평행일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -18

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a + 7 &= -\frac{1}{3}a - 8 \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a &= -8 - 7 \\ \frac{5}{6}a &= -15 \\ a &= -18\end{aligned}$$

3. 전체 길이가 110km인 강을 배를 타고 10시간 이내에 왕복하려고 한다. 강을 따라 내려갈 때의 배의 속력이 시속 30km일 때, 강을 거슬러 올라갈 때의 배의 속력은 시속 몇 km 이상이어야 하는지 소수 첫째 자리까지 구하여라. (단, 강물의 속력은 시속 3km로 일정하다.)

▶ 답: km

▷ 정답: 19.5 km

해설

강을 거슬러 올라갈 때의 배의 속력을 x 라 하면

$$\frac{110}{33} + \frac{110}{x-3} \leq 10$$

$$\frac{110}{x-3} \leq 10 - \frac{110}{33} = \frac{330-110}{33} = \frac{220}{33} = \frac{20}{3}$$

$$110 \leq \frac{20}{3}(x-3)$$

$$330 \leq 20(x-3)$$

$$39 \leq 2x$$

$$\therefore 19.5 \leq x(\text{km})$$

따라서 강을 거슬러 올라갈 때의 배의 속력은 시속 19.5km 이상이어야 한다.

4. 일차함수 $y = 3x + b$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동하였더니 일차함수 $y = 3x - 3$ 의 그래프가 되었다. $y = 3x + b$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 일차함수의 y 절편은 얼마인가?

- ① 5 ② 3 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

해설

$y = 3x + b$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동하면 $y = 3x + b - 4 = 3x - 3$ 이므로 $b = 1$ 이다. 이 직선을 y 축 방향으로 4 만큼 평행이동하면 $y = 3x + 5$ 가 되고, y 절편은 5 이다.

5. $x : y = 2 : 3$ 이고, $1 < 2x + 3 < 9$ 일 때, $(x-1)\left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2}\right)$ 의 범위를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $-\frac{13}{4} < (x-1)\left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2}\right) < \frac{17}{2}$

해설

$1 < 2x + 3 < 9$, $-1 < x < 3$ 이고

$x : y = 2 : 3$ 에서 $3x - 2y = 0$, $y = \frac{3}{2}x$,

따라서 $-\frac{3}{2} < y < \frac{9}{2}$ 이다.

$$-\frac{5}{2} < x + y < \frac{15}{2}, -\frac{13}{2} < -(x + y) + 1 < \frac{7}{2} \dots \text{㉠}$$

한편, $3x = 2y$ 이므로

$x \geq 0, y \geq 0$ 또는 $x < 0, y < 0$

xy 의 최솟값은 $x = 0$ 또는 $y = 0$ 일 때, $xy = 0$

xy 의 최댓값은 $x = 3$ 이고 $y = \frac{9}{2}$ 일 때, $xy = \frac{27}{2}$

이때, $x < 3$ 이고 $y < \frac{9}{2}$ 이므로 $xy < \frac{27}{2}$

따라서 $0 \leq xy < \frac{27}{2} \dots \text{㉡}$

$(x-1)\left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\{xy - (x+y) + 1\}$ 이므로

㉠, ㉡에 의해서 $-\frac{13}{2} < xy - (x+y) + 1 < 17$

$$\therefore -\frac{13}{4} < (x-1)\left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2}\right) < \frac{17}{2}$$

6. 두 수 a, b 에 대하여 $\frac{b}{a} < 0$ 이고 $\frac{2a-b}{a-2b} = M$ 이라 할 때, M 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{1}{2} < M < 2$

해설

$$\frac{2a-b}{a-2b} = M \text{ 에서}$$

$$2a-b = aM - 2bM$$

$$a(2-M) = b(1-2M)$$

조건에 의하여 $\frac{b}{a} = \frac{2-M}{1-2M} < 0$ 이다.

(1) $2-M > 0$ 이고, $1-2M < 0$ 일 때,

$$M < 2, M > \frac{1}{2}$$

(2) $2-M < 0$ 이고, $1-2M > 0$ 일 때,

$M > 2, M < \frac{1}{2}$ 이므로 조건에 맞지 않는다.

따라서 (1), (2)에서 M 의 값의 범위는 $\frac{1}{2} < M < 2$ 이다.

7. 자연수 a, b 에 대하여 x, y, z 에 대한 연립방정식 $\frac{x+y}{a} = \frac{x+2y}{3b} = -\frac{x}{2ab} = z$ 가 무수히 많은 해집합을 가질 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\frac{x+y}{a} = \frac{x+2y}{3b} = -\frac{x}{2ab} = z$$

$$x+y-az=0 \cdots \textcircled{1}$$

$$x+2y-3bz=0 \cdots \textcircled{2}$$

$$x+2abz=0 \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ 에서 $x = -2abz$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-2abz + y - az = 0$$

$$y = (2ab + a)z \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{2}$ 에 $\textcircled{3}, \textcircled{4}$ 을 대입하면 $(2ab + 2a - 3b)z = 0$

그런데 $z \neq 0$ 이므로

$$2ab + 2a - 3b = 0, 2a(b+1) = 3b$$

$$\therefore 2a = \frac{3b}{b+1} = 3 - \frac{3}{b+1}$$

이때, a, b 는 자연수이므로 $b+1 = 3, \therefore a = 1, b = 2$

따라서 $a+b = 3$

8. 일차함수 $f(x)$ 에 대하여 $S(n) = \frac{f(p+1) - f(1)}{(-1) \times 1} + \frac{f(p+2) - f(2)}{(-1)^2 \times 2} + \frac{f(p+3) - f(3)}{(-1)^3 \times 3} - \dots + \frac{f(p+n) - f(n)}{(-1)^n \times n}$ 라고 정의한다. $S(1) + S(3) + S(5) + \dots + S(99) = 200$ 일 때, $f(x)$ 의 기울기를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $-\frac{4}{p}$

해설

$$S(1) = -f(p+1) + f(1)$$

$$S(3)$$

$$= -f(p+1) + f(1) + f(p+2) - f(2) - f(p+3) + f(3)$$

$$= S(1) - \frac{f(p+3) - f(p+2)}{(p+3) - (p+2)} + \frac{f(3) - f(2)}{3-2} \text{ 에서}$$

$$\frac{f(p+3) - f(p+2)}{(p+3) - (p+2)} = \frac{f(3) - f(2)}{3-2} = (\text{기울기}) \text{ 이므로 } S(3) =$$

$$S(1)$$

같은 방법으로

$$S(1) = S(3) = S(5) = S(7) = \dots = S(99) \text{ 이다.}$$

$$S(1) + S(3) + S(5) + \dots + S(99) = 50 \times S(1) = 200 \text{ 이므로}$$

$$S(1) = 4$$

일차함수 $f(x) = ax + b$ 라 하면

$$S(1) = -f(p+1) + f(1)$$

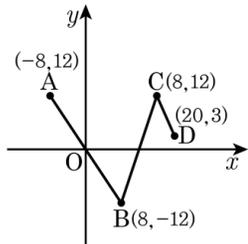
$$= -a(p+1) - b + a + b$$

$$= -ap = 4$$

$$\therefore a = -\frac{4}{p}$$

따라서 $f(x)$ 의 기울기는 $-\frac{4}{p}$ 이다.

9. x 의 값의 범위가 $-8 \leq x \leq 20$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다. $f(k-3) = f(k+3)$ 을 만족하는 k 의 값을 구하여라.



▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 7

▷ 정답: 49

해설

직선 AB의 방정식 $y = -\frac{3}{2}x \dots \text{㉠}$

직선 BC의 방정식 $y = 3x - 36 \dots \text{㉡}$

직선 CD의 방정식 $y = -\frac{9}{4}x + 48 \dots \text{㉢}$

$f(k-3) = f(k+3)$ 에서 $k-3 = x$ 일 때,
 $f(x) = f(x+6)$ 이므로

1) ㉡에 x 대신 $x+6$ 을 대입하면

$$y = 3x - 18 \dots \text{㉣}$$

㉠, ㉣의 값이 같으므로

$$-\frac{3}{2}x = 3x - 18,$$

$$x = 4 \quad \therefore k = 7$$

2) ㉢에 x 대신 $x+6$ 을 대입하면

$$y = -\frac{9}{4}x + \frac{69}{2} \dots \text{㉤}$$

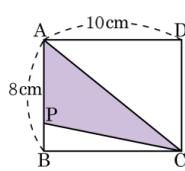
㉠, ㉤의 값이 같으므로

$$-\frac{3}{2}x = -\frac{9}{4}x + \frac{69}{2},$$

$$x = 46 \quad \therefore k = 49$$

따라서 k 의 값은 7 또는 49이다.

10. 다음 그림의 직사각형 ABCD에서 $\overline{AD} = 10\text{cm}$, $\overline{AB} = 8\text{cm}$ 이고, 점 P는 점 A를 출발하여 매초 2cm씩 점 B를 향해 움직이고 있다. x 초 후의 $\triangle APC$ 의 넓이를 $y\text{cm}^2$ 라고 할 때, x, y 사이의 관계식은? (단, x 의 범위는 $0 < x \leq 4$)



- ① $y = 2x$ ② $y = 4x$ ③ $y = 4x + 10$
 ④ $y = 40 - 10x$ ⑤ $y = 10x$

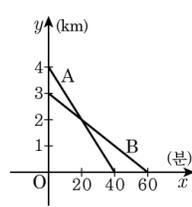
해설

$$\overline{AP} = 2x \text{이므로}$$

$$\triangle APC = \frac{1}{2} \times 2x \times 10 = 10x$$

$$y = 10x$$

11. 다음 그래프는 두 사람 A, B가 각각 집에서 출발하여 학교로 갈 때, 이동한 시간 x 와 학교까지 남은 거리 y 를 나타낸 것이다. 만약 A가 원래 출발한 시각보다 t 분 늦게 출발한다면, B는 원래 출발한 시각보다 $f(t)$ 분 더 일찍 출발해야 A와 동시에 학교에 도착할 수 있다고 할 때, 함수 $f(t)$ 의 식을 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: $-t + 20$

해설

직선 A의 방정식 $\frac{x}{40} + \frac{y}{4} = 1$ 에서

$$y = -\frac{1}{10}x + 4 \cdots \text{㉠}$$

직선 B의 방정식 $\frac{x}{60} + \frac{y}{3} = 1$ 에서

$$y = -\frac{1}{20}x + 3 \cdots \text{㉡}$$

A가 원래 출발한 시각보다 t 분 늦게 출발하였으므로 ㉠에 x 대신 $x-t$ 를 대입하면

$$y = -\frac{1}{10}(x-t) + 4 \cdots \text{㉢}$$

B가 원래 출발한 시각보다 $f(t)$ 분 빨리 출발하였으므로 ㉡에 x 대신 $x+f(t)$ 를 대입하면

$$y = -\frac{1}{20}(x+f(t)) + 3 \cdots \text{㉣}$$

학교에 도착하는 시간이 같으므로 ㉢, ㉣의 x 절편이 같아야 한다.

$$\text{㉢의 } x \text{ 절편은 } 40+t$$

$$\text{㉣의 } x \text{ 절편은 } 60-f(t)$$

$$40+t = 60-f(t)$$

$$\therefore f(t) = -t + 20$$

12. 거리가 5m 인 두 지점 A, B 를 끝별 한 마리가 1m/s 의 일정한 속도로 1 분 동안 왕복한다. 끝별이 A 에서 출발한 후, 이동한 시간을 x 초, x 초 후에 끝별과 A 지점 사이의 거리를 $f(x)$ 라고 할 때, $f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 150

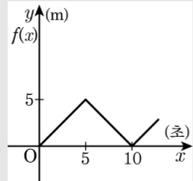
해설

별이 A 지점에서 B 지점까지 가는 데는 $\frac{5}{1} = 5$ (초)가 걸린다.

즉, $0 \leq x \leq 5$ 일 때, $f(x) = x$

또 5 초 후에는 B 지점에서 A 지점으로 이동하므로

$5 \leq x \leq 10$ 일 때, $f(x) = 5 - x$



1 분 동안 왕복하므로 $0 \leq x \leq 60$ 일 때,

$f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\left(\frac{1}{2} \times 10 \times 5\right) \times 6 = 150$ 이다.

13. $\frac{2^{-11} + 2^{-12} + \dots + 2^{-20}}{2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-10}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{1}{1024}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{2^{-11} + 2^{-12} + \dots + 2^{-20}}{2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-10}} \\ &= \frac{2^{-10}(2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-10})}{2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-10}} \\ &= 2^{-10} = \frac{1}{1024} \end{aligned}$$

14. $\frac{a-1}{2} + \frac{a}{3} < \frac{1}{3}$ 일 때, $ax+3 < 3a+x$ 의 해를 풀면?

① $x < 3$

② $x > 3$

③ $x < -3$

④ $x > -3$

⑤ $x < 1$

해설

$$\frac{a-1}{2} + \frac{a}{3} < \frac{1}{3}, \quad 3(a-1) + 2a < 2 \quad \therefore a < 1$$

$$ax+3 < 3a+x, \quad (a-1)x < 3a-3, \quad x > \frac{3(a-1)}{a-1} \quad \therefore x > 3$$

15. $xy + \frac{1}{z} = 1$, $yz + \frac{1}{x} = 2$ 일 때, $\frac{xyz^2 - xyz}{(1-2x)(2x-1)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$$xy + \frac{1}{z} = 1, \frac{xyz + 1}{z} = 1, xyz = z - 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$yz + \frac{1}{x} = 2, \frac{xyz + 1}{x} = 2, xyz = 2x - 1 \cdots \textcircled{2}$$

$$\frac{xyz^2 - xyz}{(1-2x)(2x-1)} = \frac{xyz(z-1)}{-(2x-1)^2}$$

에 식 ①, ②을 대입하여 풀면,

$$\frac{xyz(z-1)}{-(2x-1)^2} = \frac{xyz(xyz)}{-(xyz)^2} = -1$$