

1. 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① $\sqrt{-8} = 2\sqrt{2}i$
- ② 3의 허수부분은 0이다.
- ③ $\sqrt{-2}$ 는 순허수이다.
- ④ $b = 1$ 이면 $a + (b - 1)i$ 는 실수이다.
- ⑤ 제곱하여 -3 이 되는 수는 $\pm\sqrt{3}i$ 이다.

해설

④ [반례] $a = i, b = 1$ 이면 $a + (b - 1)i = i$ 이므로 순허수이다.(거짓)

2. $\sqrt{-12} + \sqrt{-3}\sqrt{-6} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}} = a + bi$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

① 15

② 25

③ 35

④ 45

⑤ 55

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{-12} + \sqrt{-3}\sqrt{-6} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}} \\ &= 2\sqrt{3}i - 3\sqrt{2} + \sqrt{3}i \\ &= -3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}i \\ &= a + bi \\ & \text{따라서, } a = -3\sqrt{2}, b = 3\sqrt{3} \\ & \therefore a^2 + b^2 = 18 + 27 = 45 \end{aligned}$$

3. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 2(k-i) - k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되도록 하는 k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z = 2(k-i) - k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되려면 허수 부분이 0 이어야 한다.

$$z = 2(k-i) - k(1+i)^2$$

$$= 2k - 2i - 2ki$$

$$= 2k - (2 + 2k)i$$

허수 부분이 0이려면 $2 + 2k = 0$ 이어야 한다.

따라서 $k = -1$

4. 복소수 $(1+2i)x - (2+i)y + i$ 를 제곱하였더니 -9 가 되었다. 이 때, $x+y$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이고 x, y 는 실수이다.)

- ① 2 또는 -4 ② 2 또는 -3 ③ -1 또는 3
④ -1 또는 -3 ⑤ -1 또는 -2

해설

$$z = (x - 2y) + (2x - y + 1)i$$

$$z^2 = -9$$

즉, z 는 순허수이다.

$$\therefore x - 2y = 0, (2x - y + 1)^2 = 9$$

$x = 2y$ 와 $2x - y + 1 = \pm 3$ 을 연립하여 풀면

$$y = \frac{2}{3} \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$y = -\frac{4}{3} \rightarrow x = -\frac{8}{3}$$

$\therefore x + y = 2$ 또는 -4 이다.

5. 복소수 $z = (1+i)x^2 + (5+2i)x + 3(2-i)$ 에서 z 가 순허수일 때, 실수 x 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} z &= (x^2 + 5x + 6) + (x^2 + 2x - 3)i \\ &= (x+2)(x+3) + (x-1)(x+3)i \end{aligned}$$

순허수가 되려면 실수부=0, 허수부 $\neq$ 0
 $\therefore x = -2$

6. $(2 + \sqrt{3}i)^2 + (2 - \sqrt{3}i)^2$ 의 값은?

- ① $8\sqrt{3}i$ ② $4\sqrt{3}i$ ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} & (2 + \sqrt{3}i)^2 + (2 - \sqrt{3}i)^2 \\ &= (4 + 4\sqrt{3}i + 3i^2) + (4 - 4\sqrt{3}i + 3i^2) \\ &= 1 + 4\sqrt{3}i + 1 - 4\sqrt{3}i = 2 \end{aligned}$$

7. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2005} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$ 의 값을 구하면?

- ① 0 ② i ③ 1 ④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{1-i} &= i, \frac{1-i}{1+i} = -i \\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2005} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005} \\ &= i^{2005} + (-i)^{2005} \\ &= (i^4)^{501} \cdot i + ((-i)^4)^{501} \cdot (-i) \\ &= i + (-i) = 0\end{aligned}$$

8. n 이 자연수일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{4n+2} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n}$ 의 값은?

① -2

② $-2i$

③ 0

④ 2

⑤ $2i$

해설

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \text{(주어진 식)} &= (-i)^{4n+2} + i^{4n} \\ &= \{(-i)^4\}^n \cdot (-i)^2 + (i^4)^n \end{aligned}$$

$$1 \cdot (-1) + 1 = 0$$

9. $x = \sqrt{3} + 2i$, $y = \sqrt{3} - 2i$ 일 때, $x^2 + xy + y^2$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

㉠ 5

㉡ 7

㉢ $2\sqrt{3} + 4i$

㉣ 12

㉤ $12 + 2\sqrt{3}i$

해설

$$x + y = 2\sqrt{3},$$

$$xy = (\sqrt{3} + 2i)(\sqrt{3} - 2i) = 3 - 4i^2 = 7 \text{ 이므로}$$

$$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = 12 - 7 = 5 \text{ 이다.}$$

10. $x = \frac{1 + \sqrt{2}i}{3}$ 일 때, $9x^2 - 6x + 5$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x = \frac{1 + \sqrt{2}i}{3} \text{ 이므로}$$

$$3x = 1 + \sqrt{2}i$$

$$3x - 1 = \sqrt{2}i$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 9x^2 - 6x + 1 = -2$$

$$\therefore 9x^2 - 6x = -3$$

$$9x^2 - 6x + 5 \text{ 에서 } 9x^2 - 6x \text{ 가 } -3 \text{ 이므로 } -3 + 5 = 2$$

11. 복소수 z 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

보기

- ㉠ $z \cdot \bar{z}$ 는 실수이다.
- ㉡ $z + \bar{z}$ 는 실수이다.
- ㉢ $z - \bar{z}$ 는 허수이다.
- ㉤ $(z+1)(\bar{z}+1)$ 은 실수이다.

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉤

③ ㉡, ㉤

④ ㉠, ㉡, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로

㉠ $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ (실수)

㉡ $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ (실수)

㉢ $z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$

$b = 0$ 이면 실수, $b \neq 0$ 이면 허수이다.

㉤ $(z+1)(\bar{z}+1) = (a+bi+1)(a-bi+1)$
 $= (a+1+bi)(a+1-bi)$
 $= (a+1)^2 + b^2$ (실수)

12. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\overline{i-2} = i+2$

② $\overline{2i} = -2i$

③ $\overline{\sqrt{2}+i} = \sqrt{2}-i$

④ $\overline{1+\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}$

⑤ $\overline{3-2i} = 3+2i$

해설

켈레복소수는 허수부분의 부호가 바뀐다.

실수의 켈레복소수는 자기자신이다.

① $\overline{i-2} = -i-2$

13. $\alpha = 1 + i$, $\beta = 2 - i$ 의 켈레복소수를 각각 $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ 라 할 때, $\alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta}$ 의 값은?

① 0 ② 3 ③ $7 - 2i$ ④ $7 - i$ ⑤ $7 + i$

해설

$$\begin{aligned} & \alpha = 1 + i, \beta = 2 - i \text{에서 } \bar{\alpha} = 1 - i, \bar{\beta} = 2 + i \text{이므로} \\ & \alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta} \\ &= (1 + i)(1 - i) + (1 + i)(2 + i) + (1 - i)(2 - i) + (1 - i)(2 + i) \\ &= (1 + 1) + (2 - 1 + 3i) + (2 - 1 - 3i) + (2 + 1 - i) \\ &= 7 - i \end{aligned}$$

14. 다음 복소수에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① -5 의 제곱근은 $\pm\sqrt{5}i$ 이다.
- ② $2+3i$ 의 실수부분은 2, 허수부분은 3 이다.
- ③ $-3i$ 는 순허수이다.
- ④ $1-2i$ 의 켤레 복소수는 $-1+2i$ 이다.
- ⑤ 두 실수 a, b 에 대하여 복소수 $a+bi$ 가 실수가 되려면 $b=0$ 이어야 한다.

해설

- ④ $1-2i$ 의 켤레 복소수는 $1+2i$ 이다.

15. 두 복소수 $\alpha = a - 2i, \beta = 5 + bi$ 에 대하여 $\alpha - \bar{\beta} = \overline{3 + 2i}$ 를 만족하는 실수를 a, b 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 2

② 4

③ -4

④ 8

⑤ -8

해설

$$\alpha = a - 2i$$

$$\bar{\beta} = \overline{5 + bi} = 5 - bi$$

$$\alpha - \bar{\beta} = a - 2i - (5 - bi) = \overline{3 + 2i}$$

$$(a - 5) + (b - 2)i = 3 - 2i$$

$$\begin{cases} a - 5 = 3 & \therefore a = 8 \\ b - 2 = -2, & \therefore b = 0 \end{cases}$$

16. 복소수 z 의 켤레복소수가 $\bar{z}$ 일 때, 등식 $(1-i)\bar{z} + 2iz = 3-i$ 를 만족시키는 z 를 구하면?

- ① $z = -1 - 2i$ ② $z = -2 - 2i$ ③ $z = -3 - 2i$
④ $z = -3 - 3i$ ⑤ $z = -3 - 4i$

해설

복소수 $z = x + yi$ (x, y 는 실수), $\bar{z} = x - yi$ 라 놓으면
(준식) $= (1-i)(x-yi) + 2i(x+yi) = 3-i$
 $x-yi-xi-y+2xi-2y = 3-i$
 $(x-3y) + (x-y)i = 3-i$
복소수의 상등에 의하여
 $x-3y = 3, x-y = -1$
 $x = -3, y = -2$
 $\therefore z = -3 - 2i$

17. 복소수 전체의 집합에서 두 복소수 α, β 에 대하여 연산 $\odot$ 을 $\alpha \odot \beta = (\alpha + i)(\beta + i)$ 로 정의할 때, 등식 $(2 + i) \odot z = 1$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $-\frac{1}{4} - \frac{5}{4}i$

② $-i$

③ i

④ $1 + i$

⑤ $\frac{1}{4} - \frac{5}{4}i$

해설

$$(2 + i) \odot z = \{(2 + i) + i\}(z + i) \\ = (2 + 2i)(z + i) = 1$$

$$z + i = \frac{1}{2 + 2i} \text{ 이므로}$$

$$z = \frac{1}{2 + 2i} - i \\ = \frac{(2 - 2i)}{(2 + 2i)(2 - 2i)} - i \\ = \frac{2 - 2i - 8i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}i$$

18. $z = \frac{-2}{1 + \sqrt{3}i}$ 일 때, $z^4 - \bar{z}$ 의 값을 구하면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

㉠ $\sqrt{3}i$

㉡ $-\sqrt{3}i$

㉢ $2\sqrt{3}i$

㉣ $-2\sqrt{3}i$

㉤ 1

해설

$$\begin{aligned} z &= \frac{-2}{1 + \sqrt{3}i} \\ &= \frac{-2(1 - \sqrt{3}i)}{(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)} \\ &= \frac{-2(1 - \sqrt{3}i)}{1 - (\sqrt{3}i)^2} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore 2z + 1 = \sqrt{3}i \cdots \textcircled{1}$$

㉠의 양변을 제곱하여 정리하면

$$4z^2 + 4z + 1 = -3 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

㉡의 양변에 $z - 1$ 을 곱해주면

$$(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow z^3 = 1$$

$$\therefore z^3 = 1 \text{ 이므로 } z^4 = z$$

$$\therefore z^4 - \bar{z} = z - \bar{z}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} - \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \\ &= \sqrt{3}i \end{aligned}$$

19. $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{14}$ 의 값은?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ 에서 } 2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

$$(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0, \alpha^3 = 1$$

$$\therefore \alpha^{3k+1} = \alpha, \alpha^{3k+2} = \alpha^2, \alpha^{3k} = 1$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= (\alpha + \alpha^2 + 1) + (\alpha + \alpha^2 + 1) + \\ &\quad \cdots + (\alpha + \alpha^2 + 1) + \alpha + \alpha^2 \\ &= \alpha + \alpha^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$(\because \alpha^2 + \alpha + 1 = 0)$$

20. $0 < a < 1$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}\sqrt{-a}$ 를 간단히 하면?

① $a(1-a)$

② $a(a-1)$

③ $a^2(a-1)$

④ $a^2(1-a)^2$

⑤ $-a^2(1-a)^2$

해설

$$\begin{aligned} & a > 0, a-1 < 0, 1-a > 0, -a < 0 \text{ 이므로 } \sqrt{a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}\sqrt{-a} \\ &= \sqrt{a}\sqrt{-a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a} \\ &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{ai} \cdot \sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1-ai} \\ &= \sqrt{a^2} \sqrt{(1-a)^2 i^2} \\ &= -a(1-a) = a(a-1) \end{aligned}$$