1. 다음 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\sqrt{-8} = 2\sqrt{2}i$

② 3의 허수부분은 0이다.

③ $\sqrt{-2}$ 는 순허수이다.

④ $b = 1$ 이면 $a + (b-1)i$ 는 실수이다.

⑤ 제곱하여 -3 이 되는 수는 $\pm\sqrt{3}i$ 이다.

해설

④ [반례] $a = i,\ b = 1$ 이면 $a + (b-1)i = i$ 이므로 순허수이다.(거짓)

2. $\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}=a+bi$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 15 ② 25 ③ 35 ④ 45 ⑤ 55

해설

$$\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}$$
$$=2\sqrt{3}i-3\sqrt{2}+\sqrt{3}i$$
$$=-3\sqrt{2}+3\sqrt{3}i$$
$$=a+bi$$
따라서, $a=-3\sqrt{2}, b=3\sqrt{3}$

$\therefore\ a^2+b^2=18+27=45$

3. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 2(k-i)-k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되도록 하는 k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z = 2(k-i)-k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되려면 허수 부분이 0 이어야 한다.

$z = 2(k-i)-k(1+i)^2$

$= 2k-2i-2ki$

$= 2k-(2+2k)i$

허수 부분이 0이려면 $2+2k=0$ 이어야 한다.

따라서 $k=-1$

4. 복소수 $(1+2i)x-(2+i)y+i$를 제곱하였더니 -9가 되었다. 이 때, $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이고 x, y는 실수이다.)

① 2 또는 −4　　② 2 또는 −3　　③ −1 또는 3

④ −1 또는 −3　　⑤ −1 또는 −2

해설

$z=(x-2y)+(2x-y+1)i$

$z^2=-9$

즉, z는 순허수이다.

$\therefore x-2y=0,\ (2x-y+1)^2=9$

$x=2y$ 와 $2x-y+1=\pm 3$을 연립하여 풀면

$y=\frac{2}{3} \rightarrow x=\frac{4}{3}$

$y=-\frac{4}{3} \rightarrow x=-\frac{8}{3}$

$\therefore x+y=2$ 또는 -4 이다.

5. 복소수 $z = (1+i)x^2 + (5+2i)x + 3(2-i)$ 에서 z가 순허수일 때, 실수 x의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

$z = (x^2 + 5x + 6) + (x^2 + 2x - 3)i$

$\quad = (x+2)(x+3) + (x-1)(x+3)i$

순허수가 되려면 실수부$= 0$, 허수부$\neq 0$

$\therefore\ x = -2$

6. $(2+\sqrt{3}i)^2+(2-\sqrt{3}i)^2$ 의 값은?

① $8\sqrt{3}i$　② $4\sqrt{3}i$　③ -2　④ 0　⑤ 2

해설

$$(2+\sqrt{3}i)^2+(2-\sqrt{3}i)^2$$
$$=(4+4\sqrt{3}i+3i^2)+(4-4\sqrt{3}i+3i^2)$$
$$=1+4\sqrt{3}i+1-4\sqrt{3}i=2$$

7. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2005}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$ 의 값을 구하면?

① 0　② i　③ 1　④ $1+i$　⑤ $1-i$

해설

$$\frac{1+i}{1-i}=i,\ \frac{1-i}{1+i}=-i$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2005}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$$

$$=i^{2005}+(-i)^{2005}$$

$$=(i^4)^{501}\cdot i+((-i)^4)^{501}\cdot(-i)$$

$$=i+(-i)=0$$

8. n 이 자연수일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{4n+2}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n}$ 의 값은?

① -2 ② $-2i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ $2i$

해설

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$$

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$ 이므로

$$(\text{주어진 식})=(-i)^{4n+2}+i^{4n}$$
$$=\left\{(-i)^4\right\}^n\cdot(-i)^2+(i^4)^n$$
$$1\cdot(-1)+1=0$$

9. $x = \sqrt{3} + 2i$, $y = \sqrt{3} - 2i$ 일 때, $x^2 + xy + y^2$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 5　　② 7　　③ $2\sqrt{3} + 4i$

④ 12　　⑤ $12 + 2\sqrt{3}i$

해설

$x + y = 2\sqrt{3}$,

$xy = (\sqrt{3} + 2i)(\sqrt{3} - 2i) = 3 - 4i^2 = 7$ 이므로

$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = 12 - 7 = 5$ 이다.

10. $x = \dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$ 일 때, $9x^2 - 6x + 5$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x = \dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$ 이므로

$3x = 1 + \sqrt{2}i$

$3x - 1 = \sqrt{2}i$

양변을 제곱하면 $9x^2 - 6x + 1 = -2$

$\therefore\ 9x^2 - 6x = -3$

$9x^2 - 6x + 5$ 에서 $9x^2 - 6x$가 -3이므로 $-3 + 5 = 2$

11. 복소수 z 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

보기

㉠ $z \cdot \bar{z}$는 실수이다.

㉡ $z + \bar{z}$는 실수이다.

㉢ $z - \bar{z}$는 허수이다.

㉣ $(z+1)(\bar{z}+1)$은 실수이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉣ ③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로

㉠ $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ (실수)

㉡ $z + \bar{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a$ (실수)

㉢ $z - \bar{z} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi$

$b = 0$ 이면 실수, $b \neq 0$ 이면 허수이다.

㉣ $(z+1)(\bar{z}+1) = (a+bi+1)(a-bi+1)$

$$= (a+1+bi)(a+1-bi)$$

$$= (a+1)^2 + b^2 \text{ (실수)}$$

12. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\overline{i-2}=i+2$

② $\overline{2i}=-2i$

③ $\overline{\sqrt{2}+i}=\sqrt{2}-i$

④ $\overline{1+\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$

⑤ $\overline{3-2i}=3+2i$

해설

켤레복소수는 허수부분의 부호가 바뀐다.
실수의 켤레복소수는 자기자신이다.
① $\overline{i-2}=-i-2$

13. $\alpha = 1+i$, $\beta = 2-i$ 의 켤레복소수를 각각 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 라 할 때, $\alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \overline{\alpha\beta}$ 의 값은?

① 0 ② 3 ③ $7-2i$ ④ $7-i$ ⑤ $7+i$

해설

$\alpha = 1+i$, $\beta = 2-i$ 에서 $\overline{\alpha} = 1-i$, $\overline{\beta} = 2+i$ 이므로

$\alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \overline{\alpha\beta}$

$= (1+i)(1-i) + (1+i)(2+i) + (1-i)(2-i) + (1-i)(2+i)$

$= (1+1) + (2-1+3i) + (2-1-3i) + (2+1-i)$

$= 7-i$

14. 다음 복소수에 대한 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -5의 제곱근은 $\pm\sqrt{5}i$이다.

② $2+3i$의 실수부분은 2, 허수부분은 3 이다.

③ $-3i$는 순허수이다.

④ $1-2i$의 켤레 복소수는 $-1+2i$이다.

⑤ 두 실수 $a,\ b$에 대하여 복소수 $a+bi$가 실수가 되려면 $b=0$이어야 한다.

해설

④ $1-2i$의 켤레 복소수는 $1+2i$이다.

15. 두 복소수 $\alpha = a-2i, \beta = 5+bi$에 대하여 $\alpha - \overline{\beta} = \overline{3+2i}$를 만족하는 실수를 a, b라고 할 때, $a+b$의 값은?

① 2 ② 4 ③ -4 ④ 8 ⑤ -8

해설

$\alpha = a-2i$

$\overline{\beta} = \overline{5+bi} = 5-bi$

$\alpha - \overline{\beta} = a-2i-(5-bi) = \overline{3+2i}$

$(a-5)+(b-2)i = 3-2i$

$$\begin{cases} a-5=3 & \therefore \quad a=8 \\ b-2=-2, & \therefore \quad b=0 \end{cases}$$

16. 복소수 z의 켤레복소수가 $\bar{z}$일 때, 등식 $(1-i)\bar{z}+2iz=3-i$를 만족시키는 z를 구하면?

① $z=-1-2i$　② $z=-2-2i$　③ $z=-3-2i$

④ $z=-3-3i$　⑤ $z=-3-4i$

해설

복소수 $z=x+yi(x, y$는 실수$)$, $\bar{z}=x-yi$라 놓으면

(준식) $=(1-i)(x-yi)+2i(x+yi)=3-i$

$x-yi-xi-y+2xi-2y=3-i$

$(x-3y)+(x-y)i=3-i$

복소수의 상등에 의하여

$x-3y=3, x-y=-1$

$x=-3, y=-2$

$\therefore\ z=-3-2i$

17. 복소수 전체의 집합에서 두 복소수 α, β 에 대하여 연산 ◎을 $\alpha \circledcirc \beta = (\alpha+i)(\beta+i)$ 로 정의할 때, 등식 $(2+i) \circledcirc z = 1$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $-\frac{1}{4}-\frac{5}{4}i$ ② $-i$ ③ i

④ $1+i$ ⑤ $\frac{1}{4}-\frac{5}{4}i$

해설

$$(2+i) \circledcirc z = \left\{(2+i)+i\right\}(z+i)$$
$$= (2+2i)(z+i) = 1$$

$z+i = \frac{1}{2+2i}$ 이므로

$$z = \frac{1}{2+2i} - i$$
$$= \frac{(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} - i$$
$$= \frac{2-2i-8i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}i$$

18. $z = \dfrac{-2}{1+\sqrt{3}i}$ 일 때, $z^4 - \bar{z}$ 의 값을 구하면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\sqrt{3}i$ ② $-\sqrt{3}i$ ③ $2\sqrt{3}i$

④ $-2\sqrt{3}i$ ⑤ 1

해설

$$z = \frac{-2}{1+\sqrt{3}i}$$
$$= \frac{-2(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$$
$$= \frac{-2(1-\sqrt{3}i)}{4}$$
$$= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$\therefore\ 2z+1 = \sqrt{3}i \cdots$ ①

①의 양변을 제곱하여 정리하면

$4z^2+4z+1=-3 \Leftrightarrow z^2+z+1=0 \cdots$ ②

②의 양변에 $z-1$을 곱해주면

$(z-1)(z^2+z+1)=0 \Leftrightarrow z^3=1$

$\therefore\ z^3=1$ 이므로 $z^4=z$

$\therefore z^4-\bar{z} = z-\bar{z}$

$$= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$
$$= \sqrt{3}i$$

19. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{14}$ 의 값은?

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서 $2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

$(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0, \alpha^3 = 1$

$\therefore\ \alpha^{3k+1} = \alpha, \alpha^{3k+2} = \alpha^2, \alpha^{3k} = 1$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (\alpha + \alpha^2 + 1) + (\alpha + \alpha^2 + 1) + \\ &\cdots + (\alpha + \alpha^2 + 1) + \alpha + \alpha^2 \\ &= \alpha + \alpha^2 \\ &= -1\end{aligned}$$

$(\because\ \alpha^2 + \alpha + 1 = 0)$

20. $0 < a < 1$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}\sqrt{-a}$ 를 간단히 하면?

① $a(1-a)$　　② $a(a-1)$　　③ $a^2(a-1)$

④ $a^2(1-a)^2$　　⑤ $-a^2(1-a)^2$

해설

$a>0$, $a-1<0$, $1-a>0$, $-a<0$ 이므로 $\sqrt{a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}\sqrt{-a}$

$$= \sqrt{a}\sqrt{-a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}$$
$$= \sqrt{a}\cdot\sqrt{a}i\cdot\sqrt{1-a}\cdot\sqrt{1-a}i$$
$$= \sqrt{a^2}\sqrt{(1-a)^2}i^2$$
$$= -a(1-a) = a(a-1)$$