1. 다음 보기 중 집합은 모두 몇 개인가?

보기

㉠ 우리나라의 놀이공원의 모임

㉡ 머리가 긴 가수들의 모임

㉢ 10에 가까운 수들의 모임

㉣ 큰 자동차들의 모임

㉤ 1보다 작은 자연수의 모임

㉥ 6의 배수의 모임

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉡ '긴' 이라는 단어가 명확한 기준이 없으므로 집합이 될 수 없다.
㉢ '가까운' 이라는 단어는 애매하므로 집합이 될 수 없다.
㉣ '큰' 이라는 단어는 사람에 따라 그 기준이 달라지므로 집합이 될 수 없다.

2. 10 보다 크고 20 보다 작은 자연수 중에서 4 의 배수의 집합을 A 라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $10 \in A$ ② $14 \in A$ ③ $16 \notin A$

④ $18 \notin A$ ⑤ $20 \in A$

해설

집합 A 의 원소는 12, 16 이므로 $18 \notin A$ 이다.

3. 집합 $A = \{x \mid x$는 10 이하의 3의 배수$\}$ 의 부분집합을 모두 고르면?

① $\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ ② $\varnothing$

③ $\{x \mid x$는 10이하의 홀수$\}$ ④ $\{3\}$

⑤ $\{x \mid x$는 9의 약수$\}$

해설

$A = \{3,\ 6,\ 9\}$

③ $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\} \not\subset A$

⑤ $\{1,\ 3,\ 9\} \not\subset A$

4. 집합 A 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

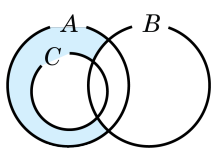
① $\varnothing \subset A$ ② $A \subset A$ ③ $A \subset (A \cup B)$

④ $A \subset (A \cap B)$ ⑤ $(B \cap A) \subset B$

해설

④ $A \supset (A \cap B)$

5. 집합 A, B, C의 포함관계가 다음과 같을 때, 다음 중 색칠한 부분을 옳게 나타낸 것은?



① $(A-B)\cap(B-C)$ ② $(A-B)\cap(A-C)$

③ $A\cap B\cap C^c$ ④ $A\cap(B\cup C)$

⑤ $(A-B)\cup(B-C)$

해설

색칠한 부분은 A에서 $B\cup C$를 뺀 것이다. 변형하면 $A-(B\cup C)=A\cap(B\cup C)^c=(A\cap B^c)\cap(A\cap C^c)=(A-B)\cap(A-C)$

6. $A=\{2,3,a+2\}$, $B=\{a-1,4\}$ 에 대하여 $A\cap B=\{4\}$ 일 때, $B-A$ 는?

① $\{1\}$ ② $\{2\}$ ③ $\{4\}$ ④ $\{1,2\}$ ⑤ $\{1,5\}$

해설

$A\cap B=\{4\}$ 이므로 $a+2=4, a=2$ 이다.
따라서 $A=\{2,3,4\}$, $B=\{1,4\}$ 이므로 $B-A=\{1\}$ 이다.

7. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ a^2+2\}$, $B=\{1, 2a-3, 2a+1\}$에 대하여 $A\cap B=\{1,3\}$이 되도록 할 때, a 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a=1$

해설

$A\cap B=\{1,3\}$ 이므로 집합
A에서 $a^2+2=3$, 따라서 $a=\pm 1$
ⅰ) $a=1$ 이면 $B=\{-1,1,3\}$
ⅱ) $a=-1$ 이면 $B=\{-5,-1,1\}$
$A\cap B=\{1,3\}$ 이므로
$\therefore a=1$

8. 통일고등학교에서 50명 학생을 대상으로 수학, 영어에 대한 흥미도를 조사한 결과를 수학을 좋아하는 학생은 32명, 영어를 좋아하는 학생은 27명이었고 수학과 영어를 모두 좋아하는 학생은 13명이었다. 그렇다면 수학과 영어를 모두 싫어하는 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 4명

해설

수학 : A , 영어 : B , 전체 : U

$n(A) = 32, n(B) = 27, n(A \cap B) = 13$

$n(A \cup B) = 32 + 27 - 13 = 46$

$\therefore n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c)$

$= n(U) - n(A \cup B) = 50 - 46 = 4$

$\therefore$ 4명

9. 집합 $X = \{x|x$는 8의 약수$\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A = \{x|x$는 4의 약수$\}$일 때, $A \cup B = X$가 되는 집합 B의 개수를 구하여라.

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 8 개

해설

$X = \{1, 2, 4, 8\}$, A$= \{1, 2, 4\}$이고
$A \cup B = X$가 되어야 하므로 집합 B는 원소 8을 반드시 포함해야 한다.
따라서, 집합 B는
$\{8\}$, $\{1, 8\}$, $\{2, 8\}$, $\{4, 8\}$, $\{1, 2, 8\}$,
$\{1, 4, 8\}$, $\{2, 4, 8\}$, $\{1, 2, 4, 8\}$
이므로 8 개이다.

10. 두 집합 $A = \{x|x$는 10 이하의 짝수$\}, B = \{x|x$는 6의 약수$\}$ 에 대하여 보기의 조건을 모두 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

보기

㉠ $A \cap X = X$ ㉡ $(A - B) \cup X = X$

▶ 답: 개

▷ 정답: 4 개

해설

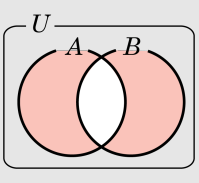
$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{1, 2, 3, 6\}$ 이고 $(A - B) \subset X \subset A$ 이다.
따라서 $\{4, 8, 10\} \subset X \subset \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 이므로 집합 X 의 개수는 $2 \times 2 = 4$(개) 이다.

11. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 연산 $A\triangle B = (A-B)\cup(B-A)$로 정의할 때, $(A\triangle B)\triangle B$ 와 같은 집합은?

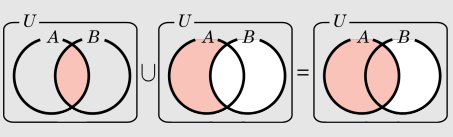
① U ② $\varnothing$ ③ A ④ B ⑤ $A\cap B$

해설

$A\triangle B = (A-B)\cup(B-A)$를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 $(A\triangle B)\triangle B = \{(A\triangle B)-B\}\cup\{B-(A\triangle B)\}$이므로 이를 벤 다이어그램으로 나타내면



$\therefore (A\triangle B)\triangle B = A$

12. 두 조건 $p : 0 < x < 3$, $q : -1 < x < 2$ 에 대하여 '$\sim p$ 또는 q' 의 부정은?

① $0 < x < 2$　② $-1 < x < 3$

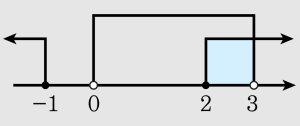
③ $x \le -1$ 또는 $x > 0$　④ $-1 \le x < 3$

⑤ $2 \le x < 3$

해설

'$\sim p$ 또는 q' 의 부정은 'p이고 $\sim q$' 이므로

$p : 0 < x < 3, \sim q : x \le -1$ 또는 $x \ge 2$ 에서



따라서, '$\sim p$ 또는 q' 의 부정은 $2 \le x < 3$ 이다.

13. 실수 x 에 대하여 명제 '$ax^2+a^2x-6\neq 0$ 이면 $x\neq 2$ 이다.' 가 참이기 위한 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라. (단, $a\neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
즉, '$x=2$ 이면 $ax^2+a^2x-6=0$ 이다.' 가 참이므로
$4a+2a^2-6=0,\ 2a^2+4a-6=0,$
$a^2+2a-3=0,\ (a+3)(a-1)=0$
$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=1$
따라서 a 의 값의 합은 $-3+1=-2$

14. 두 조건 $p : -3 < 4x + 1 < 5$, $q : k < x < h$ 에 대하여 q 가 p 이기 위한 충분조건일 때, k 의 최솟값을 a, h 의 최댓값을 b 라 할 때, ab 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$p : -3 < 4x + 1 < 5$, $q : k < x < h$ 에서
p 를 다시 정리해 보면
$p : -1 < x < 1$ 이 된다.
q 가 p 의 범위에 포함되어야 하므로 h 의 최댓값은 1, k 의 최솟값은 -1 이 된다.
$a = -1$, $b = 1$
$\therefore\ ab = -1$

15. 다음 중 세 수 3^{30}, 4^{20}, 12^{15} 의 대소 관계를 알맞게 나타낸 것은?

① $3^{30} > 4^{20} > 12^{15}$　② $4^{20} > 3^{30} > 12^{15}$

③ $12^{15} > 4^{20} > 3^{30}$　④ $3^{30} > 12^{15} > 4^{20}$

⑤ $12^{15} > 3^{30} > 4^{20}$

해설

$\left(\frac{3^{1.5}}{4}\right)^{20} = \left(\frac{3 \times 1.7}{4}\right)^{20} > 1 (3^{1.5} = 3\sqrt{3} \fallingdotseq 3 \times 1.7)$

따라서 3^{30} 이 4^{20} 보다 크다.

$\left(\frac{3^2}{12}\right)^{15} = \left(\frac{3}{4}\right)^{15} <$ 1 이 결과에서

12^{15} 이 3^{30} 보다 크다는 것을 알 수 있다.

16. $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 4$ 일 때, ab 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$a > 0$, $b > 0$ 일 때,
$a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 이므로
$a + b = 4 \geq 2\sqrt{ab}$, $0 \leq ab \leq 4$
따라서 ab 의 최댓값은 4

17. 밑변의 길이와 높이의 길이의 곱이 8인 직각삼각형이 있다. 이 때 빗변의 길이의 최솟값과 그 때의 가로의 길이를 합한 값은?

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

해설

밑변의 길이를 x, 높이를 y라 하면
$xy = 8 \cdots$㉠
피타고라스의 정리에 의하여 빗변의 길이는 $\sqrt{x^2+y^2}$이다.
$x > 0,\ y > 0$이므로
산술평균과 기하평균에 의하여
$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} = 2xy = 16$
$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{16} = 4$
단, 등호는 $x^2 = y^2$ 즉 $x = y$일 때 성립한다.
$x = y$를 ㉠에 대입하면 $x^2 = 8$
따라서 $x = 2\sqrt{2}$이다.
$4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

18. 집합 $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $n(A) = 0$　② $0 \in A$　③ $\{\varnothing\} \notin A$

④ $\varnothing \in A$　⑤ $\{0\} \subset A$

해설

집합 A 의 원소는 $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ 이므로

① $n(A) = 3$

② $0 \notin A$

③ $\{\varnothing\} \in A$

⑤ $\{0\} \not\subset A$

19. 세 집합 A, B, C 에 대하여 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $A = B$, $B = C$ 이면 $A = C$ 이다.

② $A \supset B$, $B = C$ 이면 $A \supset C$ 이다.

③ $A \subset B$, $B \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이다.

④ $A \supset B$, $B \supset C$, $C \supset A$ 이면 $A = C$ 이다.

⑤ $n(A) < n(B) < n(C)$ 이면 $A \subset B \subset C$ 이다.

해설

⑤ 예를 들면 $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $C = \{6, 7, 8, 9\}$일 때, $n(A) < n(B) < n(C)$ 이지만 $A \subset B \subset C$는 아니다.

20. 두 집합 $A = \{x|1 \le x \le 5\}$, $B = \{x|3 < x < 7\}$에 대하여 $A \cap X = X$, $(A - B) \cup X = X$ 를 만족시키는 집합 X를 $X = \{x|p \le x \le q\}$라 할 때, q의 최솟값과 최댓값을 차례대로 쓰면?

① 1, 3 ② 1, 5 ③ 1, 7 ④ 3, 5 ⑤ 3, 7

해설

조건에서 $X \subset A$, $(A - B) \subset X$ 즉, $\{x|1 \le x \le 3\} \subset X \subset \{x|1 \le x \le 5\}$

$X = \{x|p \le x \le q\}$ 에서 $p = 1$, $3 \le q \le 5$

21. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 보기 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $B \subset A$ 이면 $n(B) < n(A)$ 이다.

㉡ $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

㉢ $A = \{\varnothing\}$ 이면 $n(A) = 0$ 이다.

㉣ U^c 은 모든 집합의 부분집합이다.

㉤ $A - B = B - A$ 이면 $(A \cup B) \subset B$ 이다.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ㉠

▷ 정답: ㉢

해설

㉠$B \subset A$ 이면$n(B) \leq n(A)$ 이다.
㉢$A = \{\phi\}$ 이면$n(A) = 1$ 이다.
㉣$U^C = \phi$ 은 모든 집합의 부분집합이다.
㉤$A - B = B - A$ 이면 $A = B$ 이므로 $(A \cup B) \subset B$ 이다.

22. 다음은 명제 '$3m^2 - n^2 = 1$ 을 만족하는 (가)'에 대한 증명에서 중간 부분을 적은 것이다.

> … (생략) …
> m, n이 정수이고 $3m^2 = n^2 + 1$이므로, $n^2 + 1$은 3의 배수이다.
> 한편, 정수 n이 어떤 정수 k에 대하여
> $n = 3k$이면 $n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$
> $n = 3k+1$이면 $n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1$
> $n = 3k + 2$ 이면 $n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$이므로 n^2을 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1이다.
> 따라서 $n^2 + 1$을 3으로 나눈 나머지는 1 또는 2이다.
> … (생략) …

다음 중 위의 (가)에 가장 알맞은 것은?

① m, n 중 적어도 하나는 정수이다.

② m, n 중 어느 것도 정수가 아니다.

③ m, n이 모두 정수인 해가 적어도 하나 있다.

④ m, n이 모두 정수인 해가 오직 하나 있다.

⑤ m, n이 모두 정수인 해는 없다.

해설

귀류법을 쓰면 m, n이 정수이고 $3m^2 = n^2 + 1$ 이므로, $n^2 + 1$은 3 의 배수이다. … ㉠
한편, 정수 n이 어떤 정수 k에 대하여,
$n = 3k$이면 $n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$
$n = 3k+1$이면 $n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1$
$n = 3k+2$ 이면 $n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1$ 이므로, n^2을 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1이다.
따라서, $n^2 + 1$을 3으로 나눈 나머지는 1 또는 2이다. … ㉡
그러므로 ㉠, ㉡에 의하여 모순이다.
따라서, $3m^2 - n^2 = 1$을 만족하는 m, n이 모두 정수인 해는 없다.

23. 두 집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 $A \times B = \{(a, b) | a \in A,\ b \in B\}$ 로 정의할 때, $(A \times B) \cup (B \times A)$ 의 원소의 개수는?

① 12 개　② 16 개　③ 20 개　④ 24 개　⑤ 28 개

해설

$A \times B$는 $a \in A,\ b \in B$인 모든 순서쌍 $(a,\ b)$로 이루어지므로

$A \times B = \{(1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (3,5)\}$

$B \times A = \{(2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (5,1),\ (5,2),\ (5,3)\}$

$(A \times B) \cap (B \times A) = \{(2,2),\ (2,3),\ (3,2),\ (3,3)\}$

따라서, $n(A \times B) = 12,\ n(B \times A) = 12,\ n((A \times B) \cap (B \times A)) = 4$이므로

$n((A \times B) \cup (B \times A)) = n(A \times B) + n(B \times A) - n((A \times B) \cap (B \times A))$

$= 12 + 12 - 4 = 20$

24. 전체집합 $U=\{a,b,c,d,e\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $(A\cap B)^C=\{a,\ b,\ c\}$, $(A-B)\cap(A\cup B^C)=\{c\}$ 일 때, $n(A-B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$U=\{a,b,c,d,e\}$ 이고 $(A\cap B)^c=\{a,b,c\}$ 이므로

$A\cap B=\{b,d\}$,

$(A-B)\cap(A\cup B^c)=(A-B)\cap(A^c\cap B)^c$

$=(A-B)-(B-A)$

$=A-B$

$=\{c\}$

$\therefore n(A-B)=1$

25. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$일 때, 절대부등식 $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (등호는 $a = b = c$일 때 성립)을 이용할 때, $x > 0$이면 $8x^2 + \dfrac{2}{x}$의 최소값은?

① $2\sqrt{3}$ ② $2^3\sqrt{3}$ ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$8x^2 + \frac{2}{x} = 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq \sqrt[3]{8x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}}$$
$$= 3\sqrt[3]{8} = 6$$