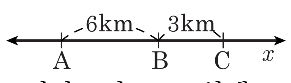
1. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(a), \mathrm{B}(b)(a > b)$ 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$는 5이고 점 $\mathrm{C}(a+b)$의 좌표를 -1이라 할 때, 점 $\mathrm{D}(a-b)$의 좌표는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$a > b$일때, $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(b)$ 사이의 거리는 $a-b$이므로, $a-b=5$
따라서 $\mathrm{D}(a-b)$의 좌표는 5

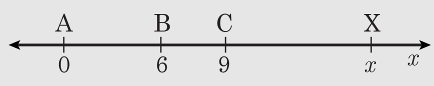
2. 그림에서 A, B, C는 도로가 통과하는 세 마을이다. A마을과 B마을 사이의 거리는 6 km, B마을과 C마을 사이의 거리는 3 km이다. 이 도로 위에 또 하나의 다른 마을이 있는데, 그 마을과 A 사이의 거리는 그 마을과 C 마을 사이의 거리의 2배이다. 그 마을과 B마을 사이의 거리는?



① 6 km　② 9 km　③ 12 km
④ 15 km　⑤ 18 km

해설

그림과 같이 A마을을 원점으로 하고, 구하고자 하는 마을을 X라 하면



A(0), B(6), C(9), X(x)
A마을과 X마을 사이의 거리는
C마을과 X마을 사이의 거리의 2배이므로
$|x-0|=2|x-9|$
곧, $|x|=2|x-9|$
$\therefore\ 2(x-9)=\pm x$
$\therefore\ x=6$ 또는 $x=18$
여기서 $x=6$이면 X = B가 되므로 성립하지 않는다.
따라서 $x=18$
이 때, X마을과 B마을 사이의 거리는 $18-6=12$(km)

3. 두 점 $\mathrm{A}(4,-3), \mathrm{B}(a, 3)$ 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$ 일 때, 양수 a 의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

두 점 $\mathrm{A}(4,-3), \mathrm{B}(a, 3)$ 에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(a-4)^2+(3+3)^2}$

$= \sqrt{a^2-8a+52}$

$= 6\sqrt{2}$

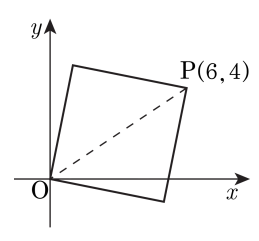
위의 식의 양변을 제곱하면 $a^2-8a+52=72$

$a^2-8a-20=0$

$(a-10)(a+2)=0$

$\therefore a=10(\because a>0)$

4. 다음 그림과 같은 정사각형의 넓이는?



① 16 ② 20 ③ 26

④ 32 ⑤ 52

해설

$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$ 이므로

주어진 정사각형의 한 변의 길이를 a라고 하면

$\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{52}$ 에서 $a^2 = 26$ 이다.

따라서 정사각형의 넓이는 26이다

5. 두 점 $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표는?

① $(-3,\ 0)$ ② $(1,\ 0)$ ③ $(2,\ 0)$
④ $(-1,\ 0)$ ⑤ $(5,\ 0)$

해설

x축 위의 점을 $P(x, 0)$라 하면
$\overline{PA} = \overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$이므로
$(x+3)^2 + (0-2)^2 = (x-4)^2 + (0-5)^2$
$14x = 28$
따라서 $x = 2$ 즉, $P(2,\ 0)$

6. 두 점 $\mathrm{A}(-1, 4)$, $\mathrm{B}(6, 3)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점을 $\mathrm{P}(a, b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\mathrm{P} = (a, 0)$ 이므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$ 에서

$(a+1)^2 + 4^2 = (a-6)^2 + 9$, $a = 2$

$\therefore\ \mathrm{P} = (2, 0)$

$a + b = 2$

7. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$ 인 $\triangle\mathrm{ABC}$가 $\angle\mathrm{A}$가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\angle\mathrm{A}$가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{CA}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 \cdots$ ㉠
이때, 세 점 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2 = (-1-a)^2 + (-5-3)^2 = a^2 + 2a + 65$

$\overline{\mathrm{CA}}^2 = (a-3)^2 + (3-7)^2 = a^2 - 6a + 25$

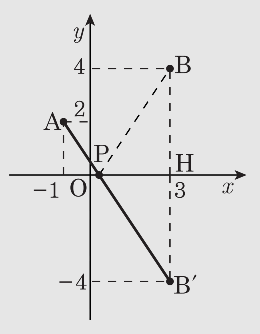
$\overline{\mathrm{BC}}^2 = (3+1)^2 + (7+5)^2 = 160$ 이므로
㉠에 의해 $2a^2 - 4a + 90 = 160$
$\therefore\ a^2 - 2a - 35 = 0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a의 값들의 합은 2이다.

8. 두 점 A $(-1,\ 2)$, B $(3,\ 4)$ 에 대하여 점 P 가 x축 위를 움직일 때, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은?

① $2\sqrt{13}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{41}$ ④ 5 ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′ 이라 하면 B′ $(3,\ -4)$
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$
따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최소거리는 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$ 의 최소 거리와 같고
세 점 A, P, B′ 이 직선 위에 있을 때
가장 짧은 $\overline{\mathrm{AB'}}$ 이 최소거리이다.
$\therefore\ \overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{(3+1)^2+(-4-2)^2}=2\sqrt{13}$



9. 수직선 위에 일정한 간격으로 7 개의 점이 있다. 7 개의 점을 각각 A, B, C, D, E, F, G 라 할 때, <보기> 에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\overline{AC}$ 를 3 : 1 로 외분하는 점은 D

㉡ $\overline{CD}$ 를 2 : 3 으로 외분하는 점은 F

㉢ $\overline{AG}$ 를 2 : 1 로 내분하는 점은 E

① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠, ㉢은 참

㉡ $\overline{CD}$ 를 2 : 3 으로 외분하는 점은 A 이므로 거짓.

10. 세 점 A $(1, 5)$, B $(-4, -7)$, C $(5, 2)$가 좌표평면 위에 있다. $\triangle$ABC 에서 $\angle$A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, 점 D 의 좌표를 구하면?

① $(0, 0)$
② $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$
③ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
④ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$
⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

해설

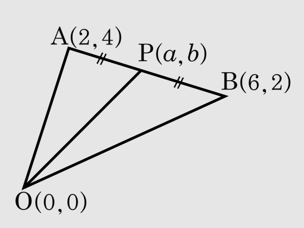
$\overline{AB} = 13$, $\overline{AC} = 5$
따라서 $\overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$
D 는 B , C 를 $13 : 5$ 로 내분한 점
$\therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

11. 세 점 $O(0,0)$, $A(2,4)$, $B(6,2)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a+b$ 의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

다음 그림에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle OAP$ 의 높이가 같으므로
$\triangle OAB = 2\triangle OAP$ 이려면
P는 선분 AB 의 중점이어야 한다.
이 때, $P\left(\dfrac{2+6}{2}, \dfrac{4+2}{2}\right)$
즉 $P(4,3)$ 이므로 $a=4, b=3$
$\therefore a+b=7$



12. 두 점 $\mathrm{A}(-2,-3)$, $\mathrm{B}(-5,4)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① $(0,-2)$ ② $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ ③ $(0,1)$
④ $(0,2)$ ⑤ $\left(0,\frac{14}{3}\right)$

해설

P의 좌표를 $(0,\alpha)$라 하면
$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$이므로
$\sqrt{(0-(-2))^2+(\alpha-(-3))^2}$
$=\sqrt{(0-(-5))^2+(\alpha-4)^2}$, $\alpha=2$
$\therefore$ $\mathrm{P}=(0,2)$

13. 직선 $y = x$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(1, 6)$, $\mathrm{B}(2, -1)$ 에서 같은 거리에 있는 점의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{12}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{16}{3}$

해설

(a, b) 가 $y = x$ 위에 있으므로 $b = a$

$\sqrt{(a-1)^2 + (a-6)^2} = \sqrt{(a-2)^2 + (a+1)^2}$

$(a-1)^2 + (a-6)^2 = (a-2)^2 + (a+1)^2$

$-2a + 1 - 12a + 36 = -4a + 4 + 2a + 1$

$-12a = -32$

$\therefore\ a = \frac{8}{3}$

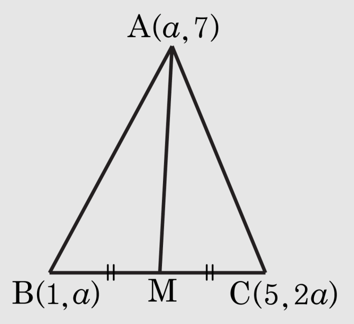
$\therefore\ a + b = a + a = \frac{8}{3} \times 2 = \frac{16}{3}$

14. 세 점 $\mathrm{A}(a, 7), \mathrm{B}(1, a), \mathrm{C}(5, 2a)$ 와 선분 BC 의 중점 M 에 대하여 $\overline{\mathrm{AM}}^2 + \overline{\mathrm{BM}}^2 = 22$ 일 때, 정수 a 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\triangle$ABC 를 그리면 다음과 같다.



이때, $\triangle$ABC 에서 중선정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 = 2\left(\overline{\mathrm{AM}}^2 + \overline{\mathrm{BM}}^2\right) = 2 \cdot 22 = 44$

따라서

$\{(1-a)^2 + (a-7)^2\} + \{(5-a)^2 + (2a-7)^2\} = 44$

$\left(2a^2 - 16a + 50\right) + \left(5a^2 - 38a + 74\right) = 44$

$7a^2 - 54a + 80 = 0$

$(a-2)(7a-40) = 0$

$\therefore a = 2$ 또는 $a = \dfrac{40}{7}$

이 때, a 는 정수이므로 $a = 2$

15. 다음은 삼각형 ABC에서 변 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 M이라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$ 임을 보이는 과정이다. 다음 중 ㉠, ㉡을 차례로 쓴 것을 고르면?

> $\overline{\mathrm{BC}}$를 x축
> $\overline{\mathrm{BC}}$의 수직이등분선을 y축으로 하여
> 좌표평면을 정하면 점 (㉠)은 원점이다.
> 이 때, 세 점 A, B, C의 좌표를
> 각각 (a, b), $(-c, 0)$, $(c, 0)$으로 놓으면
> $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=$ (㉡)$\cdots$(가)
> $2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)=$ (㉡)$\cdots$(나)
> (가), (나)에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$

① $A, a^2+b^2+c^2$ ② $B, a^2+b^2+c^2$
③ $M, a^2+b^2+c^2$ ④ $M, 2(a^2+b^2+c^2)$
⑤ $C, 2(a^2+b^2+c^2)$

해설

㉠ $= M$
㉡ $= 2(a^2+b^2+c^2)$

16. 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 2 : 1로 내분하는 점이 각각 P$(1,3)$, Q$(5,1)$, R$(4,4)$일 때, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는?

① $(3,2)$　② $(3,3)$　③ $\left(\frac{10}{3},2\right)$
④ $\left(\frac{10}{3},3\right)$　⑤ $\left(\frac{11}{3},2\right)$

해설

A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)이라 하면
$\overline{\text{AB}}$를 2 : 1로 내분하는 점이 P$(1,3)$이므로

$\frac{2x_2+x_1}{2+1}=1,\ \frac{2y_2+y_1}{2+1}=3$

$\therefore 2x_2+x_1=3,\ 2y_2+y_1=9$ $\cdots$ ㉠

$\overline{\text{BC}}$를 2 : 1로 내분하는 점이 Q$(5,-1)$이므로

$\frac{2x_3+x_2}{2+1}=5,\ \frac{2y_3+y_2}{2+1}=-1$

$\therefore 2x_3+x_2=15,\ 2y_2+y_1=-3$ $\cdots$ ㉡

$\overline{\text{CA}}$를 2 : 1로 내분하는 점이 R$(4,4)$이므로

$\frac{2x_1+x_3}{2+1}=4,\ \frac{2y_1+y_3}{2+1}=4$

$\therefore 2x_1+x_3=12,\ 2y_1+y_3=12$ $\cdots$ ㉢

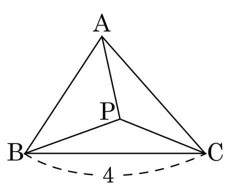
㉠, ㉡, ㉢에서

$3(x_1+x_2+x_3)=30,\ 3(y_1+y_2+y_3)=18$

$\therefore (x_1+x_2+x_3)=10,\ (y_1+y_2+y_3)=6$

따라서 $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{10}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}=2$이므로 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{10}{3},2\right)$

17. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC의 임의의 내부의 한 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2 + \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2$의 최솟값은?

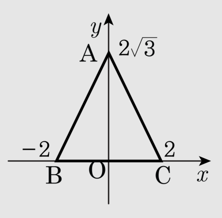


① 16　　② 17　　③ 18

④ 19　　⑤ 20

해설

다음 그림과 같이 직선 BC를 x축,
$\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 원점 O,
직선 AO를 y축으로 잡으면



$\mathrm{A}\left(0, 2\sqrt{3}\right), \mathrm{B}(-2, 0), \mathrm{C}(2, 0)$

$\mathrm{P}(x, y)$라 하면

$\overline{\mathrm{PA}}^2 + \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2$

$= x^2 + \left(y - 2\sqrt{3}\right)^2 + (x+2)^2 + y^2 + (x-2)^2 + y^2$

$= 3x^2 + 3y^2 - 4\sqrt{3}y + 20$

$= 3x^2 + 3\left(y - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 16$

따라서 $\overline{\mathrm{PA}}^2 + \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2$은

$x = 0, y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$일 때, 최솟값 16을 갖는다.

18. 세 점 $A(2,1), B(1,3), C(2,0)$ 에 대하여 $2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 3\overline{CP}^2$ 을 만족하는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하면?

① $x - y + 1 = 0$ ② $x + 2y + 3 = 0$ ③ $x - 3y - 2 = 0$
④ $x - 4y + 5 = 0$ ⑤ $x - 5y + 4 = 0$

해설

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 &= (x-2)^2 + (y-1)^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \\ &= x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{BP}^2 &= (x-1)^2 + (y-3)^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 \\ &= x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{CP}^2 &= (x-2)^2 + y^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2 \\ &= x^2 - 4x + y^2 + 4\end{aligned}$$

$2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 3\overline{CP}^2$ 에서

$2\left(x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5\right) + x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10 = 3\left(x^2 - 4x + y^2 + 4\right)$

$3x^2 - 10x + 3y^2 - 10y + 20 = 3x^2 - 12x + 3y^2 + 12$

$2x - 10y + 8 = 0$

$\therefore x - 5y + 4 = 0$

19. 좌표평면 위의 두 점 $A(1, 0)$, $B(5, 4)$에 대하여 조건 $\overline{PA}=\overline{PB}$를 만족하는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x-y+1=0$ ② $x+2y+4=0$ ③ $x+y+3=0$
④ $x-3y+4=0$ ⑤ $x+y-5=0$

해설

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓고 주어진 조건
$\overline{PA}=\overline{PB}$를 이용하여
$x,\ y$사이의 관계식을 구한다.
점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓자.
이때, $\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로
$(x-1)^2+(y-0)^2=(x-5)^2+(y-4)^2$
$x^2-2x+1+y^2=x^2-10x+25+y^2-8y+16$
$8x+8y-40=0$
$\therefore x+y-5=0$

20. 두 정점 $A(1,\ 2)$, $B(-3,\ 0)$으로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취의 방정식은?

① $y=2x+1$　② $y=2x-1$　③ $y=-2x+1$

④ $y=-2x-1$　⑤ $y=-x+2$

해설

구하는 점을 $P(x,y)$ 라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}$ 이므로

$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+3)^2+y^2}$

양변을 제곱해서 정리하면

$-8x-4y-4=0,\ -4y=8x+4$

$\therefore\ y=-2x-1$

해설

두 점으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취는 선분의 수직이등분이다.

$\overline{AB}$ 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$\overline{AB}$ 의 수직이등분선은 기울기는 -2 이고

$\overline{AB}$ 의 중점$(-1,\ 1)$ 을 지난다.

$\therefore\ y-1=-2(x+1)$

$\therefore\ y=-2x-1$

21. 두 점 A(1, 5), B(5, 3)에 대하여 $\overline{\mathrm{AP^2}}+\overline{\mathrm{BP^2}}$의 값이 최소가 되는 점 P의 좌표는?

① (4, 5)　② (3, 4)　③ (2, 3)
④ (1, 2)　⑤ (0, 1)

해설

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 되기 위한
점 P는 점 A와 점 B의 중점이어야 한다.
따라서 P(3, 4)

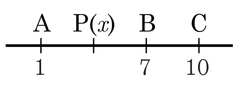
해설

P(x, y)로 놓으면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2 &= \{(x-1)^2+(y-5)^2\} \\ &\quad+\{(x-5)^2+(y-3)^2\} \\ &= 2x^2-12x+2y^2-16y+60 \\ &= 2(x^2-6x+9)+2(y^2-8y+16)+10 \\ &= 2(x-3)^2+2(y-4)^2+10\end{aligned}$$

따라서 $x=3$, $y=4$일 때 최솟값을 갖는다.

22. 수직선 위의 세 점 A(1), B(7), C(10)과 동점 P(x)에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}^2}+\overline{\mathrm{BP}^2}+\overline{\mathrm{CP}^2}$이 최소가 되는 점 P의 좌표를 구하면?



① P(5)　② P(6)　③ P(7)　④ P(8)　⑤ P(9)

해설

$\overline{\mathrm{AP}^2}+\overline{\mathrm{BP}^2}+\overline{\mathrm{CP}^2}$

$=(x-1)^2+(x-7)^2+(x-10)^2$

$=3(x-6)^2+42$

따라서 $x=6$일 때 최소가 된다.

23. 세 점 A(1, 6), B(−2, 2), C(4, 1)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC와 임의의 점 P$(a,\ b)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$의 값이 최소일 때, $a+b$의 값은?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$

$=\left\{(a-1)^2+(b-6)^2\right\}+\left\{(a+2)^2+(b-2)^2\right\}$

$\quad+\left\{(a-4)^2+(b-1)^2\right\}$

$=3a^2-6a+3b^2-18b+62$

$=3\left(a^2-2a+1\right)+3\left(b^2-6b+9\right)+32$

$=3(a-1)^2+3(b-3)^2+32$

이때, $a,\ b$는 실수이므로

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$의 값은

$a=1,\ b=3$일 때 최소이다.

$\therefore a+b=4$

24. 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ -1)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 될 때의 점 P의 좌표를 구하면?

① $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$　② $\mathrm{P}(-1,-1)$　③ $\mathrm{P}(0,0)$
④ $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$　⑤ $\mathrm{P}(1,1)$

해설

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2 &= (x+2)^2+y^2+(x-1)^2+(y+1)^2\\ &= 2x^2+2x+2y^2+2y+6\\ &= 2\left(x^2+x\right)+2\left(y^2+y\right)+6\\ &= 2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+5\end{aligned}$$

따라서 $x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$일 때,

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 된다.

$\therefore \mathrm{P}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

25. 세 점 $\mathrm{A}(4,\ -5)$, $\mathrm{B}(-5,\ 2)$, $\mathrm{C}(-8,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $\triangle\mathrm{ABC}$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$ 의 값이 최소가 될 때, 점 P 의 좌표는?

① (-3, -3) ② (-3, 0) ③ (0, 0)

④ (3, 0) ⑤ (3, 3)

해설

$\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$

$=(x-4)^2+(y+5)^2+(x+5)^2+(y-2)^2+(x+8)^2+(y-3)^2$

$=3(x+3)^2+3y^2+116$

따라서 $x=-3,\ y=0$일 때, $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$은 최소가 된다.

26. 좌표평면 위의 세 점 A(3, 3), B(−3, 0), C(3, 0) 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$ 의 값이 최소가 되는 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$

$= (a-3)^2 + (b-3)^2 + (a+3)^2 + b^2 + (a-3)^2 + b^2$

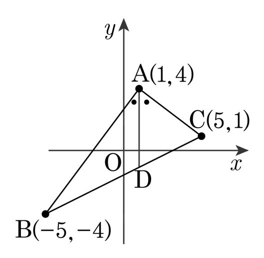
$= 3(a^2 + b^2 - 2a - 2b + 12)$

$= 3(a-1)^2 + 3(b-1)^2 + 30$

따라서 $a = 1,\ b = 1$ 일 때, 최솟값 30 을 갖는다.

$\therefore\ a + b = 2$

27. 다음 그림과 같이 세점 $A(1,4)$, $B(-5,-4)$, $C(5,1)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?



① $1:1$　② $\sqrt{2}:1$　③ $\sqrt{3}:1$

④ $2:1$　⑤ $\sqrt{5}:1$

해설

두 삼각형의 넓이비는 $\overline{BD}:\overline{CD}$ 이고
각의 이등분선정리에 의해
$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$
$\overline{AB}=\sqrt{(1+5)^2+(4+4)^2}=\sqrt{100}=10$
$\overline{AC}=\sqrt{(1-5)^2+(4-1)^2}=\sqrt{25}=5$
$\therefore\ \triangle ABC\ :\ \triangle ACD=2\ :\ 1$

28. 직선 $y=2x+1$ 위에 있고, $\mathrm{A}(2,\ 1)$, $\mathrm{B}(0,\ -1)$ 에서 같은 거리에 있는 점 P 의 좌표는?

① P(1, 0) ② P(0, 1) ③ P(−1, 0)

④ P(0, −1) ⑤ P(0, 0)

해설

점 $\mathrm{P}(a,\ 2a+1)$ 라고 하면, $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$ 이므로

$\sqrt{(a-2)^2+4a^2}=\sqrt{a^2+4(a+1)^2}$

$-4a+4=8a+4$

$\therefore\ a=0$

$\therefore\ \mathrm{P}(0,\ 1)$

29. 평면 위에 세 점 A$(0,\ a)$, B$(2,\ 3)$, C$(1,\ 0)$ 에 대하여 $\triangle$ABC 가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

해설

$\overline{\mathrm{AB}}^2 = (0-2)^2 + (a-3)^2 = a^2 - 6a + 13$

$\overline{\mathrm{BC}}^2 = (2-1)^2 + (3-0)^2 = 10$

$\overline{\mathrm{AC}}^2 = (0-1)^2 + (a-0)^2 = a^2 + 1$

1) $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$ 일 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2$ 에서
$a^2 - 6a + 13 = 10$ 즉 $a^2 - 6a + 3 = 0$
$\therefore\ a = 3 \pm \sqrt{6}$

2) $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$ 일 때, $\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2$ 에서
$a^2 + 1 = 10$ 즉 $a^2 = 9$
$\therefore\ a = \pm 3$

3) $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AB}}$ 일 때, $\overline{\mathrm{AC}^2} = \overline{\mathrm{AB}^2}$ 에서
$a^2 + 1 = a^2 - 6a + 13$ 즉 $6a = 12$
$\therefore\ a = 2$

$a = -3$이면 세 점 A, B, C는 일직선 상에 있으므로 구하는 a의 값의 합은
$(3 + \sqrt{6}) + (3 - \sqrt{6}) + 3 + 2 = 11$

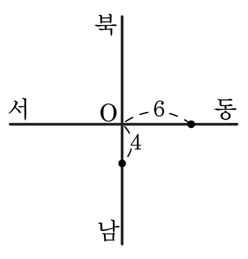
30. 세 점 $A(5,\ 0)$, $B(0,\ 3)$, $C(0,\ -3)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$의 외심의 좌표는?

① $O\left(\frac{5}{8},\ 0\right)$　② $O\left(\frac{8}{5},\ 0\right)$　③ $O\left(0,\ \frac{5}{8}\right)$
④ $O\left(0,\ \frac{8}{5}\right)$　⑤ $O(0,\ 0)$

해설

두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리
$\overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같으므로
$\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$, $\overline{BO} = \overline{CO}$ 에서
$\sqrt{x^2+(y-3)^2} = \sqrt{x^2+(y+3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $y = 0 \cdots$ ①
$\overline{AO} = \overline{BO}$ 에서
$\sqrt{(x-5)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $10x-6y=16$
즉 $5x-3y=8 \cdots$ ②
①과 ②에서 $x = \frac{8}{5}$, $y = 0$
따라서 외심의 좌표는 $O\left(\frac{8}{5},\ 0\right)$이다.

31. 다음의 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6km, B는 남쪽으로 4km 지점에 있다. 지금 A는 시속 4km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?



① 1 시간 후 ② 1.2 시간 후 ③ 1.4 시간 후

④ 1.6 시간 후 ⑤ 2 시간 후

해설

동서를 x 축, 남북을 y 축으로 잡으면 최초의 A, B 의 위치는 A(6, 0), B(0, −4) 이고 t 시간 후의 A, B 의 좌표는 A$(6-4t,\ 0)$, B$(0, -4+2t)$ 이다. 따라서, t 시간 후의 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 거리는 s 는 $s = \sqrt{(6-4t)^2+(-4+2t)^2} = \sqrt{20t^2-64t+52} = \sqrt{20\left(t^2-\frac{64}{20}t\right)+52} = \sqrt{20\left(t-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{4}{5}}$ 이므로 $t=\frac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다. ∴ 출발 후 1.6 시간 후이다.

32. 두 점 $A(3,-2)$, $B(-5,1)$ 에 대하여 선분 AB 를 $t:(1-t)$ 로 내분하는 점이 제 3 사분면에 있을 때, t 의 값의 범위는?

① $\frac{1}{4}<t<\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{3}<t<\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}<t<\frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{8}<t<\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{8}<t<\frac{5}{6}$

해설

$A(3,-2)$, $B(-5,1)$ 을 $t:1-t$ 로 내분하는 점은

$$\left(\frac{t\cdot(-5)+(1-t)\cdot 3}{t+1-t}, \frac{t\cdot 1+(1-t)\cdot(-2)}{t+1-t}\right)$$

$=(-5t+3-3t, t-2+2t)=(-8t+3, 3t-2)$

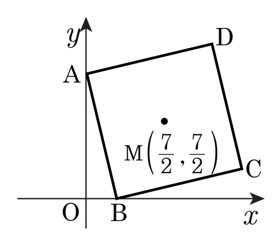
이 점이 제3 사분면에 있으므로

$-8t+3<0$, $8t>3$, $t>\frac{3}{8}$

$3t-2<0$, $3t<2$, $t<\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{3}{8}<t<\frac{2}{3}$

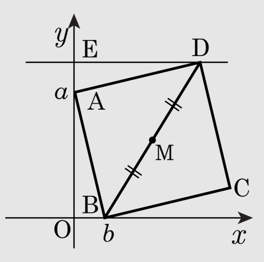
33. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD가 있다. 정사각형 ABCD의 중심 M의 좌표가 $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$일 때, $\triangle$OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)



① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

다음 그림과 같이 두 점 A, B의 좌표를 A$(0, a)$, B$(b, 0)$이라 하고 점 D를 지나면서
x축에 평행한 직선이 y축과 만나는 점을 E라 하면 $\triangle\mathrm{OAB} \equiv \triangle\mathrm{EDA}$
따라서 $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{BO}} = b, \overline{\mathrm{DE}} = \overline{\mathrm{AO}} = a$
이므로 D$(a, a+b)$
이 때, 점 M은 선분 BD의 중점이므로
M$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$
즉, $\frac{a+b}{2} = \frac{7}{2}$에서 $a+b=7$



또, 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 5이므로
$\triangle$OAB에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\sqrt{a^2+b^2} = 5, a^2+b^2 = 25$
$\therefore \triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}\left\{(a+b)^2 - (a^2+b^2)\right\}$
$= \frac{1}{4}\left(7^2 - 25\right) = 6$

34. $\triangle$ABC의 꼭짓점 A의 좌표가 $(5, 6)$이고 무게중심 G의 좌표가 $(3, 4)$일 때, 변 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점의 좌표는?

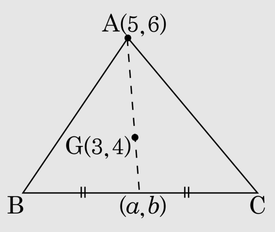
① $(1,\ 2)$ ② $(2,\ 5)$ ③ $(2,\ 3)$
④ $(3,\ 4)$ ⑤ $(4,\ 5)$

해설

무게중심은 중선을 2 : 1로 내분한다.

$\therefore\ \mathrm{G}\left(\dfrac{2a+5}{2+1},\ \dfrac{2b+6}{2+1}\right) = (3,\ 4)$

$\therefore\ a = 2,\ b = 3$



35. 두 점 A$(-2,\ 1)$, B$(4,\ -3)$에서 같은 거리에 있고 직선 $y=2x-1$ 위에 있는 점 의 좌표는?

① $(-3,\ -7)$　　② $(-2,\ -5)$　　③ $(3,\ 5)$
④ $(2,\ 3)$　　⑤ $(3,\ 2)$

해설

직선 $y=2x-1$ 위에 있는 점을 P$(a,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$에서
$(a+2)^2+(b-1)^2=(a-4)^2+(b+3)^2$
$12a-8b=20$
$\therefore\ 3a-2b=5 \cdots\cdots$ ①
또, 점 P는 $y=2x-1$ 위에 있으므로
$b=2a-1 \cdots\cdots$ ②
①, ②를 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-7$

해설

두 점으로부터 같은 거리에 있으므로 구하는 점은
A$(-2, 1)$, B$(4, -3)$의 수직이등분선 위에 있다.
$\overline{\mathrm{AB}}$의 기울기는 $\dfrac{1+3}{-2-4}=-\dfrac{2}{3}$이므로
수직이등분선의 기울기는 $\dfrac{3}{2}$, A$(-2, 1)$, B$(4, -3)$의 중점 $(1, -1)$를 지나므로
$\therefore\ y+1=\dfrac{3}{2}(x-1)\ \cdots$①
구하는 점 P는 $y=2x-1$과 ①의 교점이다.
연립하여 풀면 $x=-3, y=-7$
$\therefore\ P(-3,\ -7)$

36. 수직선 위의 5 개의 정점 A(-1), B(0), C(1), D(3), E(5)와 동점 P(x)에 대하여 점 P 에서 5 개의 정점 A, B, C, D, E까지의 거리의 합을 $f(x)$라 할 때, $f(x)$의 최솟값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

수직선 위에 임의의 동점 P(x)를 잡으면
점 P에서 정점 A, B, C, D, E 까지의 거리 $f(x)$는
$f(x) = |x+1| + |x| + |x-1| + |x-3| + |x-5|$

(i) $x < -1$, $f(x) = -x-1-x-x+1-x+3-x+5 = -5x+8$
(ii) $-1 \le x < 0$, $f(x) = x+1-x-x+1-x+3-x+5$
$= -3x+10$
(iii) $0 \le x < 1$, $f(x) = x+1+x-x+1-x+3-x+5 = -x+10$
(iv) $1 \le x < 3$, $f(x) = x+1+x+x-1-x+3-x+5 = x+8$
(v) $3 \le x < 5$, $f(x) = x+1+x+x-1+x-3-x+5 = 3x+2$
(vi) $5 \le x$, $f(x) = x+1+x+x-1+x-3+x-5 = 5x-8$
이므로
(i)~(vi)의 그래프에서 $x = 1$ 인 경우 $f(x)$는 최솟값을 갖는다.
$\therefore\ f(1) = |1+1| + |1| + |1-1| + |1-3| + |1-5| = 9$

37. 두 점 A$(t, -3)$, B$(1, 2t)$에 대하여 선분 AB의 길이의 최솟값은?

① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(1-t)^2 + (2t+3)^2}$

$= \sqrt{5t^2 + 10t + 10}$

$= \sqrt{5(t+1)^2 + 5}$에서

선분 AB의 길이는 $t = -1$일 때 최소이다.

따라서 $t = -1$일 때, $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{5}$

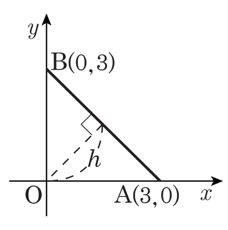
38. 세 점 A(1, 1), B(2, 4), C(a, 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형이 되도록 하는 a의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

삼각형 ABC가 $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형이므로
$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{(1-a)^2 + 1^2}$
$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{(2-a)^2 + 4^2}$
$2 - 2a + a^2 = 20 - 4a + a^2$
$2a = 18$
$\therefore\ a = 9$

39. 다음 그림은 삼각형 OAB 의 넓이를 이용하여 h 를 구하는 과정이다.



$\triangle$OAB
$= \frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}}$
$= \frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{AB}} \cdot h$
따라서
$h = (\qquad)$

(　　　) 안에 알맞은 값은?

① $\frac{12}{5}$　② $\frac{5}{2}$　③ 2　④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　⑤ 3

해설

$$\Delta\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{OA}}\ \overline{\mathrm{OB}}$$
$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 3$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{AB}} \cdot h$$
$$= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times h$$

$\frac{9}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \times h$

따라서 $h = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

40. 평면위의 두 점 $A(m^2, -m)$, $B(1, m)$일 때, 두 점 사이의 거리 $\overline{AB}$는?

① m^2 ② m^2+1 ③ m^2+2
④ m^2+3 ⑤ m^2+4

해설

$\overline{AB} = \sqrt{(1-m^2)^2+(m+m)^2}$
$= \sqrt{m^4+2m^2+1}$
$= \sqrt{(m^2+1)^2} = m^2+1$

41. 두 점 $A(-2, 1)$, $B(4, 5)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표는?

① $\left(0, \frac{1}{2}\right)$　② $\left(0, \frac{5}{2}\right)$　③ $\left(0, \frac{9}{2}\right)$
④ $\left(0, \frac{13}{2}\right)$　⑤ $\left(0, \frac{17}{2}\right)$

해설

y축 위의 점 P의 좌표를 $(0, a)$라 하면

$\overline{PA} = \overline{PB}$이므로

$\sqrt{\{0-(-2)\}^2 + (a-1)^2}$

$= \sqrt{(0-4)^2 + (a-5)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2 - 2a + 5 = a^2 - 10a + 41$

$8a = 36$

$\therefore a = \frac{9}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(0, \frac{9}{2}\right)$이다.

42. 두 점 A(3, 4), B(5, 2)로부터 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표는?

① (−3, 2)　② (0, 0)　③ (3, 1)
④ (1, 0)　⑤ (−2, 3)

해설

점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면
$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$이므로
$(a-3)^2 + (-4)^2 = (a-5)^2 + (-2)^2$
$a^2 - 6a + 25 = a^2 - 10a + 29$
$\therefore\ a = 1$
$\therefore\ \mathrm{P}(1,\ 0)$

43. 두 점 A(4, −2), B(3, 5)로부터 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① P(−2, −1) ② P(−1, 0) ③ P(0, 1)
④ P(1, 2) ⑤ P(2, 3)

해설

점 P의 좌표를 P(0, b)라고 하면

$\overline{\mathrm{PA}} = \sqrt{(0-4)^2 + (b+2)^2} = \sqrt{b^2 + 4b + 20}$

$\overline{\mathrm{PB}} = \sqrt{(0-3)^2 + (b-5)^2} = \sqrt{b^2 - 10b + 34}$

이 때, $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2$

$b^2 + 4b + 20 = b^2 - 10b + 34$

$14b = 14$

$\therefore b = 1$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 P(0, 1)

44. 두 점 $A(3,4), B(6,2)$ 에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P 의 좌표는?

① $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$　② $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$　③ $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$
④ $(4,0)$　⑤ $(5,0)$

해설

x축 위의 점 P 의 좌표를 $(a,0)$ 이라 하면
$\overline{AP} = \sqrt{(a-3)^2+(0-4)^2} = \sqrt{a^2-6a+25}$
$\overline{BP} = \sqrt{(a-6)^2+(0-2)^2} = \sqrt{a^2-12a+40}$
조건에서 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로
$\sqrt{a^2-6a+25} = \sqrt{a^2-12a+40}$
양변을 제곱하면 $a^2-6a+25 = a^2-12a+40$
$6a = 15, \quad \therefore a = \frac{5}{2}$
따라서 구하는 점 P 의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

45. 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 2)$, $\mathrm{B}(4,\ 5)$ 에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P 의 좌표를 구하면?

① $(0,0)$ ② $(1,0)$ ③ $(2,0)$ ④ $(3,0)$ ⑤ $(4,0)$

해설

P 의 좌표를 $(x,\ 0)$ 라 하면

$\sqrt{(-3-x)^2+2^2} = \sqrt{(4-x)^2+5^2}$

$6x+13=-8x+41, \quad x=2$

$\therefore \mathrm{P}=(2,0)$

46. 원점 O와 두 정점 A(2, 3), B(4, 0)에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}^2 = \overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2$을 만족하는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$

② $x^2 + y^2 + 12x - 6y + 29 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 29 = 0$

④ $x^2 + y^2 - 12x - 6y - 29 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 + 12x + 6y + 29 = 0$

해설

P의 좌표를 P$(x,\ y)$라 하면

$\overline{\mathrm{OP}}^2 = \overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$x^2 + y^2$

$= \{(x-2)^2 + (y-3)^2\} + \{(x-4)^2 + y^2\}$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$

47. 세 점 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,2)$에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$이 최소가 되도록 점 P의 좌표를 정하면?

① $P\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$ ② $P\left(\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3}\right)$ ③ $P\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$
④ $P\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $P\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

해설

$P(x,\ y)$라 두면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=x^2+y^2+(x-1)^2+y^2+(x-1)^2+(y-2)^2$

$=3x^2-4x+3y^2-4y+6$

$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{10}{3}$

$\therefore\ P(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3})$일 때 최소

※ 점 P는 $\triangle ABC$의 무게중심이 된다.

$\left(\frac{0+1+1}{3},\ \frac{0+0+2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

48. 세 점 $A(-1,-4)$, $B(3,-3)$, $C(7,1)$ 과 좌표평면 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

① 46　② 45　③ 44　④ 43　⑤ 42

해설

점 P 를 $P(x,y)$ 라고 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$

$=\{(x+1)^2+(y+4)^2\}$

$+\{(x-3)^2+(y+3)^2\}$

$+\{(x-7)^2+(y-1)^2\}$

$=x^2+2x+1+y^2+8y+16+x^2-6x+9$

$+y^2+6y+9+x^2-14x+49+y^2-2y+1$

$=3x^2-18x+3y^2+12y+85$

$=3(x^2-6x+9)+3(y^2+4y+4)+46$

$=3(x-3)^2+3(y+2)^2+46$

따라서 $x=3$, $y=-2$ 일 때,

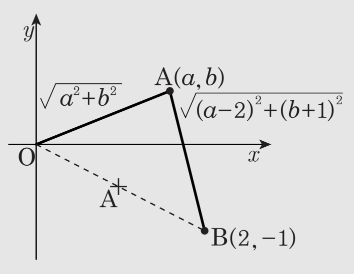
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$ 의 최솟값은 46 이다.

49. 좌표평면 위에 점 O(0, 0), A(a, b), B(2, −1) 이 있다. 이때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2}$ 의 최솟값을 구하면?

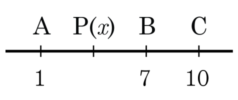
① 1　　② 2　　③ $\sqrt{5}$　　④ 3　　⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\sqrt{a^2+b^2}$ 은 $\overline{\mathrm{OA}}$ 의 길이이고, $\sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2}$ 은 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이이다.
따라서, 준 식은 O, A, B 가 일직선상에 있을 때
최소가 된다. (그림 참조)
따라서, $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$ 의 최솟값은 $\overline{\mathrm{OB}} = \sqrt{5}$



50. 수직선 위의 세 점 A(1), B(7), C(10) 과 동점 P(x) 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$ 이 최소가 되는 점 P 의 좌표를 구하면?



① P(5) ② P(6) ③ P(7) ④ P(8) ⑤ P(9)

해설

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$

$=(x-1)^2+(x-7)^2+(x-10)^2$

$=3(x-6)^2+42$

따라서, $x=6$ 일 때 최소가 된다.