

1. 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1, 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

준 식에서 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 14$ 이므로

중심은 $(2, -3)$ 이다.

구하는 원의 반지름을 r 라 하면

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = r^2$ 이고,

이 원이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$(1 - 2)^2 + (2 + 3)^2 = r^2$

$\therefore r^2 = 26$

2. 두 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라

하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고

반지름의 길이는 1 이다.

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 에서

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 16$ 이므로

이 원의 중심을 C_2 이라 하면

점 C_2 의 좌표는 $(3, 3)$ 이고

반지름의 길이는 4 이다.

$\overline{C_1 C_2} = 5$ 이고

두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로

두 원은 서로 외접하게 된다.

따라서 공통접선은 3 개이다.

3. 직선 $(a+2)x + (a-1)y - 3 = 0$ 이 원 $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y + 3 = 0$ 의 넓이를 이등분할 때, a 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.

$$2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y + 3 = 0$$

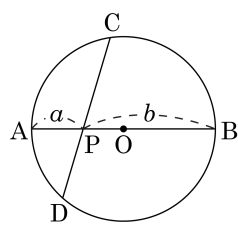
$$2(x-1)^2 + 2(y+2)^2 = 7$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = \frac{7}{2}$$

따라서 원의 중심 $(1, -2)$ 가 직선 위에 있으므로 $(a+2) \times 1 + (a-1) \times (-2) - 3 = 0$

$$\therefore a = 1$$

4. 다음 그림과 같이 원의 지름 AB 위의 임의의 한 점 P를 지나 $\overline{PC}$ 의 길이가 원의 반지름의 길이와 같아지도록 현 CD를 긋는다. $\overline{AP} = a$, $\overline{BP} = b$ 라 할 때, 선분 DP의 길이를 a , b 를 써서 나타내면?



- ① $\frac{a+b}{2}$ ② $a+b$ ③ $\sqrt{ab}$
 ④ ab ⑤ $\frac{2ab}{a+b}$

해설

$$\overline{CP} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{a+b}{2} \text{ 이고}$$

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP} \text{ 이므로}$$

$$ab = \frac{a+b}{2} \cdot \overline{DP}$$

$$\therefore \overline{DP} = \frac{2ab}{a+b}$$

5. $(k, 0)$ 에서 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 45° 일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

- ① $k = -\sqrt{2} + 1$ ② $k = \sqrt{2} + 1$ ③ $k = \sqrt{2} - 1$
④ $k = 2\sqrt{2} + 1$ ⑤ $k = \sqrt{2} + 2$

해설

$x^2 + y^2 - 2y = 0$ 에서 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 이므로
두 접선 중 하나는 x 축이고,
두 접선이 이루는 각의 크기가 45° 이므로
다른 하나의 접선의 기울기는 -1 이다. ($\because k > 0$)
따라서 접선의 방정식을 $y = -x + b$ 로 놓으면 $x + y - b = 0$
이 때, 원의 중심 $(0, 1)$ 에서 이 직선까지의 거리가
원의 반지름과 같으므로

$$\frac{|0 + 1 - b|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 1$$

$$\therefore |1 - b| = \sqrt{2}$$

$$b > 1 \text{ 이므로 } b - 1 = \sqrt{2}$$

$$\therefore b = \sqrt{2} + 1$$

따라서 접선의 방정식은 $y = -x + \sqrt{2} + 1$ 이고

점 $(k, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -k + \sqrt{2} + 1 \quad \therefore k = \sqrt{2} + 1$$