1. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

> ㉠ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=-\sqrt{-6}$
>
> ㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=3i$
>
> ㉢ $\sqrt{-27}-\sqrt{-3}=2\sqrt{3}i$
>
> ㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}}=-2i$
>
> ㉤ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{5}=-\sqrt{10}$
>
> ㉥ $\sqrt{(-3)^2}+(\sqrt{-3})^2=6$

① ㉠,㉡ ② ㉢,㉣ ③ ㉠,㉣,㉤

④ ㉣,㉥ ⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉥

해설

㉠ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}i=-\sqrt{6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}=-3i$

㉢ $\sqrt{-27}-\sqrt{-3}=3\sqrt{3}i-\sqrt{3}i=2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}}=\dfrac{4}{2i}=-2i$

㉤ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{2}i\times\sqrt{5}=\sqrt{10}i$

㉥ $\sqrt{(-3)^2}+(\sqrt{-3})^2=\sqrt{9}+(\sqrt{3}i)^2=0$

2. 복소수 $z=(1+i)x^2+x-(2+i)$가 0이 아닌 실수가 되도록 실수 x의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -1 ② 1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 2

해설

복소수 z를 $a+bi$ (a, b는 실수) 의 꼴로 정리하면

$z=(x^2+x-2)+(x^2-1)i$

이것이 실수가 되려면 허수부분이 0이 되어야 한다.

즉, $x^2-1=0$, $x=\pm 1$

한편, $x=1$이면 $z=0+0i=0$이므로

$z\neq 0$라는 조건에 맞지 않는다.

$\therefore\ x=-1$

3. 복소수 $a^2(1+i)+a(3+2i)+2$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 a의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$(\text{준식})=\left(a^2+3a+2\right)+\left(a^2+2a\right)i \Rightarrow$ 순허수

즉, $a^2+3a+2=0$

$a^2+2a\neq0$이므로 $\therefore\ a=-1$

4. 실수 x, y 대하여 $\dfrac{x}{1+i}+\dfrac{y}{1-i}=2-i$가 성립할 때, $2x+y$ 의 값은?

① 8　② 7　③ 5　④ 4　⑤ $\dfrac{9}{5}$

해설

$$\frac{(1-i)x+(1+i)y}{(1+i)(1-i)}=2-i$$

$$\frac{(x+y)-(x-y)i}{2}=2-i$$

$$(x+y)-(x-y)i=4-2i$$

복소수의 상등에 의해서

$x+y=4\cdots$㉠, $x-y=2\cdots$㉡

㉠, ㉡ 에서 $x=3,\ y=1\quad \therefore\ 2x+y=7$

5. $(3+4i)^5(15-20i)^5$ 을 간단히 하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① 5^7 ② 5^{10} ③ 5^{12} ④ 5^{15} ⑤ 5^{20}

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 5^5(3+4i)^5(3-4i)^5 \\ &= 5^5\{(3+4i)(3-4i)\}^5 \\ &= 5^5(5^2)^5 \\ &= 5^{15}\end{aligned}$$

6. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2004}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$ 를 간단히 하면?

① $-2i$　② $2i$　③ $1+i$　④ $1-i$　⑤ i

해설

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)=i,\left(\frac{1-i}{1+i}\right)=-i$ 이고 $i^4=1$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2004}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$$

$$=i^{2004}+(-i)^{2005}$$

$$=i^{4\times501}+(-i)^{4\times501}\times(-i)$$

$$=1+(-i)$$

$$=1-i$$

7. $A = \dfrac{1-i}{1+i}$ 일 때, $1 + A + A^2 + A^3 + \ \cdots \ + A^{2005}$ 의 값은?

① $-i$　② 1　③ 0　④ $1+i$　⑤ $1-i$

해설

$A = \dfrac{1-i}{1+i} = -i$

$1 + A + A^2 + A^3 + A^4 + \cdots + A^{2005}$

$= 1 + \{(-i) + (-1) + i + 1\} + \cdots + (-i)$

$= 1 - i$

8. $x = 1 + \sqrt{2}i$, $y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^3 - y^3$ 의 값을 구하면?

① $2\sqrt{2}i$　② $-2\sqrt{2}i$　③ $\sqrt{2}i$

④ $-\sqrt{2}i$　⑤ $2i$

해설

$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$

$x - y = 2\sqrt{2}i$, $xy = (1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i) = 3$

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= (2\sqrt{2}i)^3 + 3\cdot 3\cdot(2\sqrt{2}i) \\ &= -16\sqrt{2}i + 18\sqrt{2}i \\ &= 2\sqrt{2}i \end{aligned}$$

9. $x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}, y=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ -2 ④ 3 ⑤ -4

해설

$$x+y=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$$

$$xy=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)=\frac{1-(-3)}{4}=1$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}&=\frac{x^3+y^3}{xy}\\&=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}\\&=-2\end{aligned}$$

10. 복소수 z 와 그의 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대한 다음 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $z+\bar{z}$ 는 실수이다.
② $z=\bar{z}$ 이면 z 는 실수이다.
③ $z\bar{z}=1$ 이면 $z^2=1$ 이다.
④ $z\bar{z}=0$ 이면 $z=0$ 이다.
⑤ $z\bar{z}$ 는 실수이다.

해설

복소수 z 와 그의 켤레복소수를 각각

$z=a+bi,\ \bar{z}=a-bi$ $(a, b$ 는 실수$)$라 하면

① $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (참)

② $z=\bar{z} \Leftrightarrow a+bi=a-bi$

$\Leftrightarrow 2bi=0$

$\Leftrightarrow b=0$(참)

③ $z\bar{z}=a^2+b^2=1 \Rightarrow z^2=a^2-b^2+2abi \neq 1$ (거짓)

(반례) $a=0,\ b=1$ 일 때, $z^2=-1$

④ $z\bar{z}=a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0,\ b=0$ (참)

⑤ $z\bar{z}=a^2+b^2$ (참)

11. $\alpha = -2+i$, $\beta = 1-2i$ 일 때 $\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}$ 의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 10 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}
&\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}\\
&=\alpha(\overline{\alpha}+\overline{\beta})+\beta(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\\
&=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\\
&=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})\\
&=(-1-i)(-1+i)\\
&=2
\end{aligned}$$

12. $z^2 = \sqrt{5} + i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$z = x + yi$ ($x,\ y$ 는 실수) 로 놓으면 $(x+yi)^2 = \sqrt{5} + i$

$x^2 - y^2 + 2xyi = \sqrt{5} + i$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2 - y^2 = \sqrt{5},\ 2xy = 1$

$z\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 + y^2$ 이므로

$$(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = (\sqrt{5})^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6$$

$x^2 + y^2 > 0$ 이므로 $x^2 + y^2 = \sqrt{6}$

$\therefore\ z\bar{z} = \sqrt{6}$

해설

$z^2 = \sqrt{5} + i$, $\overline{z^2} = \sqrt{5} - i$

$z^2\overline{z^2} = (\sqrt{5}+i)(\sqrt{5}-i) = 6$

$z\bar{z} = \pm\sqrt{6}$

$z\bar{z} \geq 0$ 이므로 $z\bar{z} = \sqrt{6}$

13. $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}i}{2}$ 에 대하여 복소수 $w=\frac{z+1}{3z-2}$ 일 때, $w\overline{w}$ 의 값을 구하면?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$z+\overline{z}=1,\ z\overline{z}=2$

$$
\begin{aligned}
w\overline{w} &= \frac{z+1}{3z-2}\times\frac{\overline{z}+1}{3\overline{z}-2} \\
&= \frac{z\overline{z}+(z+\overline{z})+1}{9z\overline{z}-6(z+\overline{z})+4} \\
&= \frac{2+1+1}{18-6+4} \\
&= \frac{4}{16} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

14. 복소수 z의 켤레복소수를 $\bar{z}$라 할 때, $(1+i)z-2i\bar{z}=5-3i$를 만족하는 복소수 z는? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $1+i$　② $1-i$　③ $2+i$　④ $2-i$　⑤ $1-2i$

해설

임의의 복소수 $z=a+bi, \bar{z}=a-bi$

$(1+i)(a+bi)-2i(a-bi)=5-3i$

$a+bi+ai-b-2ai-2b=5-3i$

$(a-3b)+(-a+b)i=5-3i$

$$\begin{cases} a-3b=5 \\ -a+b=-3 \end{cases}$$

연립하여 풀면 $a=2, b=-1$

$\therefore\ z=2-i$

15. $x = \dfrac{3+i}{2}$ 일 때, $p = 2x^3 - 2x^2 - 5x + 3$ 의 값을 구하면?

① $2+i$ ② $2-i$ ③ $-2+i$

④ $-4+i$ ⑤ $4+i$

해설

$x = \dfrac{3+i}{2}$ 에서 $2x - 3 = i$

$(2x-3)^2 = i^2$ 에서 $2x^2 - 6x + 5 = 0$

나눗셈 실행하여 몫과 나머지를 구하면

$2x^3 - 2x^2 - 5x + 3$

$= (2x^2 - 6x + 5)(x+2) + 2x - 7$

$= 2x - 7$

$= 2\left(\dfrac{3+i}{2}\right) - 7$

$= -4 + i$

16. $w = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $1 + w + w^2 + \cdots + w^{100}$ 의 값은?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 0

④ $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$w = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서

$$w^2 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$$

$$= \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$w^3 = w \cdot w^2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{-1-\sqrt{3}}{2} = \frac{1-3i^2}{4} = 1$$

$1 + w + w^2 = 1 + \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} + \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} = 0$ 이므로

$$\therefore 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + \cdots + w^{100}$$

$$= 1 + w + w^2 + w^3(1 + w + w^2) + \cdots$$

$$+ w^{96}(1 + w + w^2) + w^{99}(1 + w)$$

$$= 0 + 0 + \cdots + 0 + w^{99}(1 + w) = (w^3)^{33} \cdot (1 + w)$$

$$= 1 + w = 1 + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

17. 다음 식에서 등호가 처음 잘못 사용된 부분을 고르면?

$$i = \sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i} = \frac{i^2}{i} = -i$$

① $\sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}}$ ② $\sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$ ③ $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i}$

④ $\frac{1}{i} = \frac{i^2}{i}$ ⑤ $\frac{i^2}{i} = -i$

해설

$a > 0,\ b < 0$ 일 때 $\sqrt{\frac{a}{b}} \neq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

예를들면, $i = \sqrt{\frac{1}{-1}} \neq \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = -i$

18. $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$, $\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{c}{b}}$, $|a+b|>|c|$인 a, b, c에 대하여 $\sqrt{(a+b+c)^2}-|a+b|-\sqrt{c^2}$의 값은?

① $2a$　② $2b$　③ $-2c$　④ $-2a$　⑤ $-3b$

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 이므로, $a \le 0$, $b \le 0$

$\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{c}{b}}$ 이므로, $b<0$, $c \ge 0$

$|a+b|>|c|$ 이므로, $-(a+b)>0$

$\therefore\ a+b+c<0$

$$\begin{aligned}\therefore(\text{주어진 식}) &= |a+b+c|-|a+b|-|c| \\ &= -(a+b+c)+(a+b)-c \\ &= -2c\end{aligned}$$

19. $\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{a+1}{a}}$ 일 때, $|a-1|+|a|+|a+1|$ 을 간단히 하면?

① $-a+2$ ② $-a$ ③ 2

④ a ⑤ $a-2$

해설

$a+1 \geq 0,\ a<0 \Rightarrow -1 \leq a < 0$

$\therefore$ (준식) $= -(a-1)-(a)+(a+1)$

$= -a+2$

20. $x^2 - x + 1 = 0$ 의 한 근을 z라 한다. $p = \dfrac{1+z}{3-z}$ 일 때, $7p \cdot \overline{p}$ 의 값을 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이 $z,\ \overline{z}$ 이므로

$z + \overline{z} = 1,\ z\overline{z} = 1$

$$\begin{aligned} 7p \cdot \overline{p} &= 7\left(\frac{1+z}{3-z}\right)\left(\overline{\frac{1+z}{3-z}}\right) \\ &= 7\left(\frac{1+z}{3-z}\right)\left(\frac{1+\overline{z}}{3-\overline{z}}\right) \\ &= 7\left\{\frac{1+(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}}{9-3(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}}\right\} \\ &= 3 \end{aligned}$$