1. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \geq 0$의 해를 구하면?

① 해가 없다　② $x = 3$
③ $x \neq 3$인 모든실수　④ $-3 < x < 3$
⑤ 모든 실수

해설
$(x-3)^2 \geq 0$, (실수$)^2 \geq 0$이므로
$\therefore$ ⑤ 모든실수

2. 이차부등식 $x^2 + 2x + a < 0$의 해가 $-4 < x < 2$일 때, a의 값을 구하여라.(단, a는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

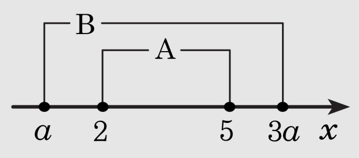
해가 $-4 < x < 2$ 이므로
$(x+4)(x-2) < 0$
$x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + a$
$\therefore a = -8$

3. 양의 실수 a에 대하여 $-x^2+7x-10 \ge 0$의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \le 0$을 만족할 때, a의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} \le a \le 2$ ② $\frac{2}{3} \le a \le 2$ ③ $\frac{5}{3} \le a \le 2$
④ $\frac{5}{3} \le a \le 5$ ⑤ $2 \le a \le 5$

해설

$-x^2 + 7x - 10 \ge 0$
$x^2 - 7x + 10 \le 0$
$(x-2)(x-5) \le 0$
$2 \le x \le 5$
$x^2 - 4ax + 3a^2 \le 0$
$(x-a)(x-3a) \le 0$
$a \le x \le 3a (\because a > 0)$
㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



따라서 $a \le 2,\ 3a \ge 5$이므로 $\frac{5}{3} \le a \le 2$

4. $\begin{cases} x^2-3x \le 0 \\ x^2-5x+4<0 \end{cases}$ 을 만족하는 x 의 범위의 해가 $\alpha < x \le \beta$일 때, $\alpha+\beta$ 의 값은?

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$x^2-3x \le 0$에서

$x(x-3) \le 0$이므로

$0 \le x \le 3 \cdots$ ㈎

$x^2-5x+4<0$에서

$(x-1)(x-4)<0$이므로

$1<x<4 \cdots$ ㈏

㈎, ㈏에 의해

$1<x \le 3$이므로

$\alpha=1, \beta=3$

$\therefore \alpha+\beta=4$

5. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+3x-4<0 \\ (x-a)(x+2)>0 \end{cases}$ 의 해가 $-2<x<1$이 될 때, 실수 a의 최댓값은?

① 0 ② -2 ③ -4 ④ -6 ⑤ -8

해설

$x^2+3x-4<0$의 해가
$-4<x<1$이므로
연립부등식의 해가 $-2<x<1$가 되려면
$(x-a)(x+2)>0$의 해는
$x<a, x>-2$이고, $a \le -4$이다.

6. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(a), \mathrm{B}(b)(a > b)$ 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$는 5이고 점 $\mathrm{C}(a+b)$의 좌표를 -1이라 할 때, 점 $\mathrm{D}(a-b)$의 좌표는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$a > b$일때, $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(b)$ 사이의 거리는 $a-b$이므로, $a-b=5$
따라서 $\mathrm{D}(a-b)$의 좌표는 5

7. 두 점 $\mathrm{A}(-1,4), \mathrm{B}(6,3)$ 에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 $\mathrm{P}(a,b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\mathrm{P}=(a,0)$ 이므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$ 에서
$(a+1)^2+4^2=(a-6)^2+9$, $a=2$
$\therefore\ \mathrm{P}=(2,0)$
$a+b=2$

8. 수직선 위의 두 점 $A(-3)$, $B(6)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P, $3:2$로 외분하는 점을 Q라 한다. 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 21

해설

$\frac{2\times 6+1\times(-3)}{2+1}=3$에서 $P(3)$

$\frac{3\times 6-2\times(-3)}{3-2}=24$에서 $Q(24)$

$\therefore\ \overline{PQ}=|24-3|=21$

9. 네 점 $\mathrm{A}(1,4)$, $\mathrm{B}(-2,-3)$, $\mathrm{C}(x,y)$, $\mathrm{D}(6,7)$를 네 꼭짓점으로 하는 사각형이 평행사변형이 되도록 하는 점 C의 좌표는?

① C(−1, 2)　② C(3, 0)　③ C(3, 4)
④ C(1, −1)　⑤ C(0, 0)

해설

평행사변형의 대각선의 성질에 의해 $\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점이 일치하므로

$$\left(\frac{6-2}{2},\ \frac{7-3}{2}\right)=\left(\frac{x+1}{2},\ \frac{y+4}{2}\right)$$

$$(2\ ,\ 2)=\left(\frac{x+1}{2},\ \frac{y+4}{2}\right)$$

$\therefore\ x=3\ ,\ y=0$

$\therefore\ \mathrm{C}(3,0)$

10. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표가 A$(1,\ 1)$, B$(2,\ 4)$, C$(6,\ 3)$이고 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점을 D라 하자. 삼각형 BCD의 무게중심의 좌표가 $(x,\ y)$일 때, $x-y$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 점 A$(1,\ 1)$, B$(2,\ 4)$이므로
점 D의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$$a=\frac{2\cdot2-1\cdot1}{2-1}=3,\ b=\frac{2\cdot4-1\cdot1}{2-1}=7$$

따라서 D$(3,\ 7)$이므로
삼각형 BCD의 무게중심의 좌표 $(x,\ y)$는

$$x=\frac{2+6+3}{3}=\frac{11}{3},\ y=\frac{4+3+7}{3}=\frac{14}{3}$$

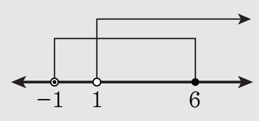
$$\therefore x-y=\frac{11}{3}-\frac{14}{3}=-1$$

11. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-5x-6 \le 0 \\ (x+k)(x-1) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $1 < x \le 6$ 이 되도록 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $k > 1$　　② $k \ge 1$　　③ $k < -1$

④ $k > -1$　　⑤ $k \ge -1$

해설



$x^2-5x-6 \le 0$,

$(x-6)(x+1) \le 0$,

$-1 \le x \le 6$

연립방정식의 해가 $1 < x \le 6$이 되려면

$(x+k)(x-1) > 0$의 해는 $x > 1$, $x < -k$이어야 하고

다음 그림에서 k의 범위는 $-k \le -1$, $k \ge 1$

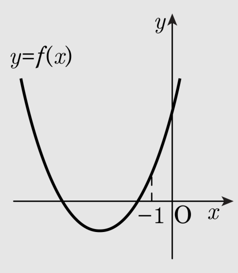
12. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+6-k=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$f(x)=x^2-2kx+6-k$ 라 하면
방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\frac{D}{4}=(-k)^2-(6-k)>0$ 에서

$k^2+k-6>0,\ (k+3)(k-2)>0$

$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>2$

(ii) $f(-1)=1+2k+6-k>0$ 에서 $k>-7$

(iii) $-\frac{-2k}{2}<-1$ 에서 $k<-1$

이상에서 $-7<k<-3$

따라서 정수 k 는 $-6,\ -5,\ -4$ 의 3 개다.

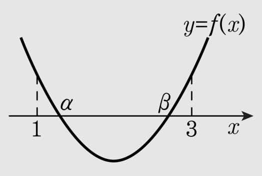
13. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면
$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$
$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$
$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \frac{13}{3}$
$\therefore\ a < \frac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이
$x = \frac{a}{2}$ 이므로 $1 < \frac{a}{2} < 3$
$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \frac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4,\ \beta = \frac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

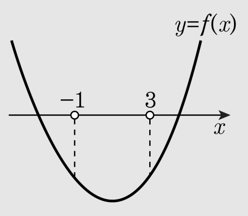
14. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k<0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.
$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \le 0,\ f(3) \le 0$ 이어야 한다.



(i) $f(-1) \le 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1)\cdot(-1) + 3k \le 0,\ k+3 \le 0$
$\therefore k \le -3$
(ii) $f(3) \le 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1)\cdot 3 + 3k \le 0,\ 9k+3 \le 0$
$\therefore k \le -\frac{1}{3}$
(i), (ii) 에서 $k \le -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3이다.

15. 두 점 A$(-2,\ 0)$, B$(1,\ -1)$에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소가 될 때의 점 P의 좌표를 구하면?

① $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ② $P(-1, -1)$ ③ $P(0, 0)$
④ $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ⑤ $P(1, 1)$

해설

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2 &= (x+2)^2+y^2+(x-1)^2+(y+1)^2\\ &= 2x^2+2x+2y^2+2y+6\\ &= 2\left(x^2+x\right)+2\left(y^2+y\right)+6\\ &= 2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+5\end{aligned}$$

따라서 $x=-\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2}$일 때,

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소가 된다.

$\therefore P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

16. 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(3,\ 3)$, $\mathrm{B}(-3,\ 0)$, $\mathrm{C}(3,\ 0)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$ 의 값이 최소가 되는 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$

$= (a-3)^2 + (b-3)^2 + (a+3)^2 + b^2 + (a-3)^2 + b^2$

$= 3(a^2 + b^2 - 2a - 2b + 12)$

$= 3(a-1)^2 + 3(b-1)^2 + 30$

따라서 $a = 1,\ b = 1$ 일 때, 최솟값 30 을 갖는다.

$\therefore\ a + b = 2$

17. 부등식 $x^2-3<x+\sqrt{4x^2+4x+1}$ 의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은 ?

① -1　② 0　③ 2　④ 4　⑤ 6

해설

주어진 부등식은 $x^2-3<x+|2x+1|$

(i) $x\geq-\frac{1}{2}$일 때,

$x^2-3<x+2x+1,\ x^2-3x-4<0$

$(x-4)(x+1)<0$

$\therefore\ -\frac{1}{2}\leq x<4$

(ii) $x<-\frac{1}{2}$일 때,

$x^2-3<x-(2x+1),\ x^2+x-2<0$

$(x+2)(x-1)<0$

$\therefore\ -2<x<-\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $-2<x<4$

$\therefore\ \alpha=-2,\ \beta=4$

$\therefore\ \alpha+\beta=2$

18. 임의의 실수 x, y에 대하여 $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + ay + b > 0$이 성립할 a, b의 조건은? (단, a, b는 실수)

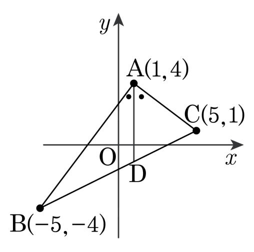
① $a = 1,\ \ b > 2$ ② $a = 1,\ \ b < 2$ ③ $a = 2,\ \ b > 1$

④ $a = 2,\ \ b \geq 1$ ⑤ $a = 2,\ \ b \leq 1$

해설

준식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2 + 2(1+y)x + y^2 + ay + b > 0$ 이고
임의의 실수 x에 대하여 항상 성립하기 위해서는
$D/4 < 0$를 만족해야 한다.
$D/4 = (1+y)^2 - (y^2 + ay + b) < 0$
$\therefore (2-a)y + 1 - b < 0 \cdots$ ①
① 식이 모든 실수 y에 성립할 조건은
$(2-a) = 0,\ \ 1 - b < 0,$
$\therefore a = 2,\ \ b > 1$

19. 다음 그림과 같이 세점 A$(1, 4)$, B$(-5, -4)$, C$(5, 1)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC 가 있다. $\angle$A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle$ABD 와 $\triangle$ACD 의 넓이의 비는?



① $1:1$ ② $\sqrt{2}:1$ ③ $\sqrt{3}:1$

④ $2:1$ ⑤ $\sqrt{5}:1$

해설

두 삼각형의 넓이비는 $\overline{BD}:\overline{CD}$ 이고
각의 이등분선정리에 의해
$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$
$\overline{AB}=\sqrt{(1+5)^2+(4+4)^2}=\sqrt{100}=10$
$\overline{AC}=\sqrt{(1-5)^2+(4-1)^2}=\sqrt{25}=5$
$\therefore\ \triangle ABC : \triangle ACD = 2 : 1$

20. 두 점 A$(-1,\ 3)$, B$(3,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하면?

① 4 ② $\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

P$(a,\ 0)$이라하면, $\overline{AP} = \overline{BP}$

$(a+1)^2 + 3^2 = (a-3)^2 + 5^2$, $8a = 24$

$\therefore\ a = 3$

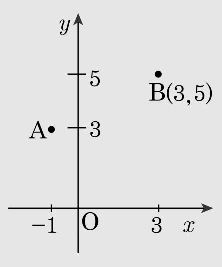
Q$(0,\ b)$이라 하면, $\overline{AQ} = \overline{BQ}$

$1^2 + (b-3)^2 = (-3)^2 + (b-5)^2$

$\therefore\ 4b = 24$

$\therefore\ b = 6$ P$(3,\ 0)$, Q$(0,\ 6)$

$\therefore\ \overline{PQ} = \sqrt{3^2+6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$



21. 직선 $x+y=2$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(0,6)$, $\mathrm{B}(2,2)$ 에서 같은 거리에 있는 점을 P 라 할 때, $\overline{\mathrm{AP}}$ 의 길이를 구하면?

① 2　② $\sqrt{5}$　③ $2\sqrt{2}$　④ $\sqrt{10}$　⑤ 5

해설

$x+y=2$ 위에 있는 점 P 는
$(\alpha, -\alpha+2)$ 로 나타낼 수 있다.
$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$ 이므로
$\alpha^2 + (-\alpha-4)^2 = (\alpha-2)^2 + (-\alpha)^2$
$\alpha = -1$
$\mathrm{P}(-1,\ 3)$
$\therefore\ \overline{AP} = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{10}$

22. 세 점 A$(-1,\ 1)$, B$(3,\ 1)$, C$(4,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC의 외심을 O$(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

점 O에서 세 점 A$(-1,\ 1)$, B$(3,\ 1)$, C$(4,\ 2)$에 이르는 거리는 같으므로

$\overline{\mathrm{OA}}^2 = \overline{\mathrm{OB}}^2$ 에서 $2a+1=-6a+9$

$\therefore\ a=1$

$\overline{\mathrm{OB}}^2 = \overline{\mathrm{OC}}^2$ 에서 $-2b+5=-4b+13$

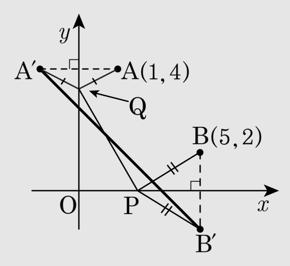
$\therefore\ b=4$

그러므로 $a+b=5$

23. 두 점 $\mathrm{A}(1,4), \mathrm{B}(5,2)$ 에 대하여 점 P는 x축 위를 움직이고 점 Q는 y축 위를 움직일 때, $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값을 구하면?

① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

해설

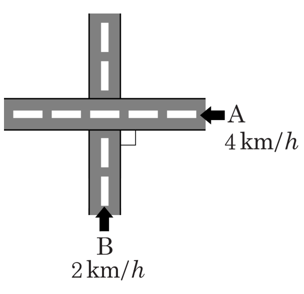


다음 그림과 같이 점 A를 y축에 대하여
대칭이동한 점을 A′, 점 B를
x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라고 하면
$\mathrm{A}'(-1,4), \mathrm{B}'(5,-2)$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{BP}} &= \overline{\mathrm{A'Q}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{B'P}} \\ &\geq \overline{\mathrm{A'B'}} \\ &= \sqrt{(5+1)^2+(-2-4)^2} \\ &= \sqrt{72}=6\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $6\sqrt{2}$ 이다.

24. 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6 km, B는 남쪽으로 4 km지점에 있다. 지금 A는 시속 4 km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2 km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?



① 1 시간 후　② 1.2 시간 후　③ 1.4 시간 후　④ 1.6 시간 후　⑤ 2 시간 후

해설

동서를 x 축, 남북을 y 축으로 잡으면
최초의 A, B 의 위치는 A$(6,\ 0)$, B$(0, -4)$ 이고
t 시간 후의 A, B 의 좌표는
A$(6-4t,\ 0)$, B$(0, -4+2t)$ 이다.
따라서 t 시간 후의 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 거리는 s 는

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{(6-4t)^2+(-4+2t)^2} \\ &= \sqrt{20t^2-64t+52} \\ &= \sqrt{20\left(t^2-\frac{64}{20}t\right)+52} \\ &= \sqrt{20\left(t-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{4}{5}} \end{aligned}$$

이므로

$t=\frac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다.

∴ 출발 후 1.6 시간 후이다.