1. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 한다.
 $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \cup Q = U$

② $P \cap Q = \phi$

③ $Q \subset P$

④ $P \subset Q$

⑤ $P = Q$

해설

$$\sim p \rightarrow \sim q \text{ 이 참이면 } P^c \subset Q^c \leftrightarrow P \supset Q$$

해설

$$\sim p \rightarrow \sim q \text{ 이 참이면 대우인 } q \rightarrow p \text{ 가 참따라서 } Q \subset P$$

2. $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이고, $a + b + c = 14$ 일 때, $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2 + 2^2 + 3^2) \{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2\}$$

$$\geq (\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$$

$$(\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2 \leq 14(a + b + c) = 14^2$$

이 때 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이므로

$$0 \leq \sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c} \leq 14$$

따라서 최댓값은 14이다.

3. 선영, 나영, 해영은 세 자매이다. 세 사람은 자신들을 소개하는 자리에서 다음과 같이 말하였다.

선영 : 나는 둘째이다.

나영 : 나는 둘째가 아니다.

해영 : 나는 셋째가 아니다.

위의 세 명의 말 중 하나만 참일 때, 첫째, 둘째, 셋째를 차례로 나타낸 것은?

① 선영, 해영, 나영

② 해영, 나영, 선영

③ 해영, 선영, 나영

④ 나영, 해영, 선영

⑤ 나영, 선영, 해영

해설

선영이의 말이 진실이라고 가정하면 둘째가 둘이 되므로 모순
나영이의 말이 진실이라고 가정하면 둘째가 없으므로 모순
해영이의 말이 진실이라고 가정하면 해영은 셋째가 아닌데 나영이가 둘째이므로 해영이가 첫째 선영이는 둘째가 아니므로 선영이가 셋째가 되어 모순이 없다.

∴ 해영이가 진실을 말하고 있으며, 해영이가 첫째, 나영이는 둘째, 선영이는 셋째이다.

4. 다음은 $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ 임을 증명하는 과정이다. 빈 칸 (가), (나), (다)에 들어갈 식 또는 기호가 순서대로 바르게 나열된 것을 고르면?

$$a > 0, b > 0 \text{ 일 때, } \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$$

(증명)

$$\boxed{\text{가}} - \boxed{\text{나}}$$

$$= (a + 2\sqrt{ab} + b) - (a + b) = 2\sqrt{ab} > 0$$

$$\therefore (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$$

그런데, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ $\boxed{\text{다}}$ 0,

$\sqrt{a+b}$ $\boxed{\text{다}}$ 0 이므로 $\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

- ① $\sqrt{a} + \sqrt{b}, \sqrt{a+b}, <$
- ② $\sqrt{a} + \sqrt{b}, \sqrt{a+b}, >$
- ③ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, (\sqrt{a+b})^2, <$
- ④ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, (\sqrt{a+b})^2, >$
- ⑤ $(\sqrt{a+b})^2, (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, >$

해설

양 변을 제곱하여 $a - b > 0$ 이면 $a > b$ 임을 이용한다.

5. 다음 중 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 실수이다.)

㉠ $p : |a| + |b| = 0 \quad q : ab = 0$

㉡ $p : (a-b)(b-c) = 0 \quad q : (a-b)^2 + (b-c)^2 = 0$

㉢ $p : 0 < x < y \quad q : x^2 < y^2$

㉣ $p : x < y \quad q : [x] < [y]$ (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

① ㉠, ㉡

② ㉡, ㉣

③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉣

⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $p : |a| + |b| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 이고 $b = 0 \quad q : ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 또는 $b = 0 \therefore p \Rightarrow q$ 이고 $p \nLeftarrow q$ 이므로 만족

㉡ $p : (a-b)(b-c) = 0 \quad a = b$ 또는 $b = c \quad q : a = b$ 그리고 $b = c \therefore p \nRightarrow q$ 이고 $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족한다.

㉢ $p \Rightarrow q$ ($\because x, y$ 모두 양수) $p \nLeftarrow q$ ($\because x, y$ 모두 음수이거나 서로 부호가 다를 때 참이 아닐 수 있다.) $\therefore$ 만족

㉣ $p \nRightarrow q$ ($\because x = 1, y = 1.5$ 일 때 $[1] = [1.5] = 1$ 일 수 있다.) $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족