1. 방정식 $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ 은 어떤 도형을 나타내는가?

① 중심이 $(0,\ 1)$ 이고, 반지름이 1 인 원

② 중심이 $(0,\ 1)$ 이고, 반지름이 2 인 원

③ 중심이 $(0,\ 1)$ 이고 반지름이 4 인 원

④ 중심이 $(0,\ -1)$ 이고 반지름이 2 인 원

⑤ 중심이 $(0,\ -1)$ 이고 반지름이 1 인 원

해설

$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$
$\Rightarrow\ x^2 + (y-1)^2 = 4$ 중심은 $(0,\ 1)$ 이고,
반지름은 2 인 원이다.

2. 두 원 O_1, O_2의 중심거리가 $d=7$이고, 그 각각 반지름의 길이 r_1, r_2가 2, 5일 때, 두 원은 어떤 위치관계에 있는가?

① 외접한다.
② 내접한다.
③ 두 점에서 만난다.
④ 만나지 않는다.
⑤ 네 점에서 만난다.

해설

$d=r_1+r_2$ 이므로 두 원은 외접한다.

3. 평행이동 $(x, y) \to (x+1, y-1)$ 에 의하여 원점으로 옮겨지는 점은?

① $(-1, 1)$ ② $(0, 0)$ ③ $(1, -1)$
④ $(1, 1)$ ⑤ $(-1, -1)$

해설

(a, b) 라 하면

$(a+1, b-1) = (0, 0)$
$\therefore (a, b) = (-1, 1)$

4. 다음 점 $(-3, 4)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면?

① $(3, -4)$ ② $(-4, 4)$ ③ $(4, -3)$

④ $(-4, 2)$ ⑤ $(-5, 0)$

해설

원점대칭은 x , y부호를 각각 반대로 해주면 된다.

5. 좌표평면 위의 점 $(4,\ -2)$ 을 $y=x$ 에 대하여 대칭이동 시키면 점 $(a,\ b)$ 이다. 이때, $a+b$ 의 값은?

① -2 ② -0 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

$y=x$ 대칭 : $x \to y, y \to x$

$\therefore (4,\ -2) \to (-2,\ 4) = (a,\ b)$ 에서 $a+b=2$

6. 두 점 A(1, 2), B(−1, 4)를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2+(y-4)^2=4$　② $(x+1)^2+(y-2)^2=8$

③ $(x-1)^2+(y-2)^2=4$　④ $x^2+(y-3)^2=2$

⑤ $x^2+y^2=2$

해설

원의 중심 : $\left(\frac{1+(-1)}{2}, \frac{2+4}{2}\right)=(0, 3)$

반지름 : $\frac{\sqrt{2^2+2^2}}{2}$

∴ 원의 방정식 : $x^2+(y-3)^2=(\sqrt{2})^2$

7. 다음의 x, y 에 대한 이차방정식 중 원의 방정식을 나타내지 <u>않은</u> 것은?

① $x^2+y^2+x+2y+1=0$ ② $x^2+y^2+x+2y+2=0$

③ $x^2+y^2+2x+y+1=0$ ④ $x^2+y^2-2x+4y+3=0$

⑤ $x^2+y^2-2x+4y+4=0$

해설

① $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}$

② $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=-\frac{3}{4}$

③ $(x+1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

④ $(x-1)^2+(y+2)^2=2$

⑤ $(x-1)^2+(y+2)^2=1$

8. 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$(x+1)^2+y^2=1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라 하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고
반지름의 길이는 1 이다.
$x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 에서
$(x-3)^2+(y-3)^2=16$ 이므로
이 원의 중심을 C_2 이라 하면
점 C_2 의 좌표는 $(3, 3)$ 이고
반지름의 길이는 4 이다.
$\overline{C_1C_2}=5$ 이고
두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로
두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

9. 원 $x^2+y^2=8$과 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-2<k<2$　② $0<k<4$　③ $-4<k<0$

④ $-2<k<0$　⑤ $-4<k<4$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d를 구하면

$$d=\frac{|0+0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d<r$이고

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2} \quad \therefore\ -4<k<4$$

10. 직선 $y = -2x + a$가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$에 의하여 잘려지는 선분의 길이를 최대로 하는 a의 값은 ?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에서
$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$
직선 $y = -2x + a$ 가 원의 중심 $(2,\ 1)$ 을 지날 때, 잘린 선분의 길이가 최대이므로
$a = 2 \times 2 + 1 = 5$

11. 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $\mathrm{A}(1,2)$에서 그은 접선의 방정식은?

① $-2x+y+5=0$　② $-2x+y-3=0$

③ $x-y+5=0$　④ $x+2y+5=0$

⑤ $x+2y-5=0$

해설

접점이 주어졌을 때 접선의 방정식 구하는 공식
$x_1x+y_1y=r^2$을 이용하면,
$1\cdot x+2\cdot y=5$　$\therefore\ x+2y-5=0$

12. $x^2+y^2=9$ 에 접하고 기울기가 2 인 직선의 방정식을 구하면?

① $y=x\pm\sqrt{5}$ ② $y=2x\pm3\sqrt{5}$ ③ $y=4x\pm2\sqrt{5}$

④ $y=5x\pm5\sqrt{5}$ ⑤ $y=x\pm2\sqrt{5}$

해설

구하는 접선의 방정식은

$y=2x\pm3\sqrt{1+2^2}$ ← $m=2, r=3$

$\therefore y=2x\pm3\sqrt{5}$

13. 두 원 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2-4x-4y=0$의 교점과 점 $(-1,\ 1)$을 지나는 원의 넓이는?

① π　② 2π　③ 4π　④ 8π　⑤ 16π

해설

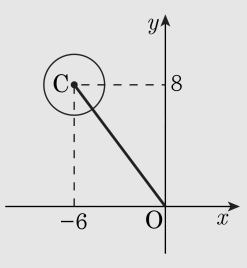
두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$(x^2+y^2-4)+k(x^2+y^2-4x-4y)=0\cdots$㉠
㉠이 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로
㉠에 대입하여 정리하면 $k=1$
$\therefore x^2+y^2-2x-2y-2=0$이므로
$(x-1)^2+(y-1)^2=4$
따라서, 반지름의 길이가 2이므로 원의 넓이는 4π이다.

14. 원점에서 $x^2+y^2+12x-16y+96=0$ 위의 임의의 점까지의 거리의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

해설

$x^2+y^2+12x-16y+96=0$을 변형하면
$(x+6)^2+(y-8)^2=4$이므로
이 원은 중심이 $\mathrm{C}(-6,8)$, 반지름의 길이가 2이다.
이 때, 원점 O에서 점 $\mathrm{C}(-6,8)$에 이르는 거리는
$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{(-6)^2+8^2}=10$이므로
원점 O에서 원 위의 점에 이르는 거리의 최솟값은 $\overline{\mathrm{OC}}-2=10-2=8$이고,
최댓값은 $\overline{\mathrm{OC}}+2=10+2=12$
따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 20이다.

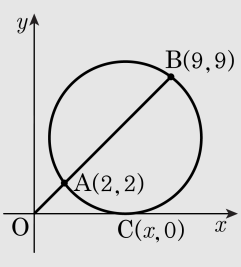


15. 좌표평면 위의 두 점 (2, 2), (9, 9) 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$x^2 = \sqrt{2^2+2^2} \cdot \sqrt{9^2+9^2} = 36 \quad x = 6$

16. 점 $\mathrm{A}(2,4)$와 원 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 위의 임의의 점 P를 이은 선분 AP의 중점의 자취의 길이는?

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3}{2}\pi$ ④ 2π ⑤ 3π

해설

원 위의 점을 $\mathrm{P}(a,b)$, 선분 AP의 중점을 $\mathrm{Q}(x,y)$라 하면

$x=\frac{2+a}{2}$, $y=\frac{4+b}{2}$

$\therefore a=2(x-1)$, $b=2(y-2)$ $\cdots$㉠

이 때 $\mathrm{P}(a,b)$가 원 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 위의 점이므로

$a^2+b^2-4a-2b+1=0$ $\cdots$㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4(x-1)^2+4(y-2)^2-8(x-1)-4(y-2)+1=0$

$x^2+y^2-4x-5y+\frac{37}{4}=0$

$\therefore (x-2)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)=1$

따라서 점 Q의 자취는 중심의 좌표가 $\left(2,\frac{5}{2}\right)$이고, 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 자취의 길이는

$2\pi \doteq 2\pi$

17. 직선 $x-y+2=0$ 에 대하여 점 A(3, 4) 와 대칭인 점의 좌표를 (x', y') 이라 할 때, $x'+y'$ 을 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$y=x+2$ 이므로 A(3, 4) 를 직선에 대해
대칭시킨 점을 (x', y') 라 하면,
$x'=y-2$ $y'=x+2$, $(x, y)=(3, 4)$ 이므로
$x'=2$ $y'=5$, $\therefore$ $x'+y'=7$

18. 두 정점 $A(-\sqrt{2},\ 0)$, $B(\sqrt{2},\ 0)$ 가 있다. 조건 $2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$ 를 만족시키는 점 $P(x,\ y)$ 의 자취는 원이다. 이 원의 반지름은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$

$2\left\{(x+\sqrt{2})^2+y^2\right\} - \left\{(x-\sqrt{2})^2+y^2\right\} = 9$

이것을 정리하면, $(x+3\sqrt{2})^2+y^2 = 25$

점 P 의 자취는 점 $(-3\sqrt{2},\ 0)$ 을 중심으로 하고,

반지름이 5 인 원이다.

19. 두 점 $A(-1,3)$, $B(2,a)$를
지나는 직선이 원 $x^2+y^2=1$ 과 접할 때, a의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

두 점 $A(-1,3)$, $B(2,a)$ 를

지나는 직선의 방정식은, $y-3=\dfrac{a-3}{3}(x+1)$

$\therefore\ (a-3)x-3y+a+6=0\ \cdots\cdots ㉠$

직선 ㉠이 원 $x^2+y^2=1$ 과 접하므로

원의 중심 $(0,0)$ 에서 직선 ㉠에 이르는 거리가

원의 반지름의 길이인 1 과 같다.

$\therefore\ \dfrac{|a+6|}{\sqrt{(a-3)^2+9}}=1$

$\therefore\ |a+6|=\sqrt{(a-3)^2+9}\ \cdots\cdots ㉡$

㉡의 양변을 제곱하면 $a^2+12a+36=a^2-6a+9+9$,$18a=-18$

$\therefore\ a=-1$

20. 점 $(2,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선의 방정식이 $y=a_1x+b_1, y=a_2x+b_2$ 일 때, $a_1a_2-b_1b_2$ 의 값은?

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{5}{3}$ ⑤ $-\frac{4}{3}$

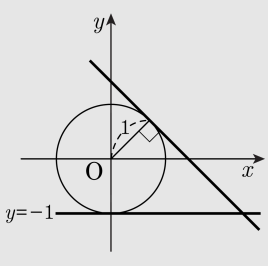
해설

접선의 방정식을 $y=ax+b$라고 하면, $(2,\ -1)$을 지나므로 $-1=2a+b \quad \therefore\ b=-2a-1$

$y=ax-2a-1, \quad ax-y-2a-1=0$

원점과 접선과의 거리가 1이므로

$$\frac{|-2a-1|}{\sqrt{a^2+1}}=1$$



$|-2a-1|=\sqrt{a^2+1}$

$4a^2+4a+1=a^2+1, \quad 3a^2+4a=0$

$\therefore\ a=0 \text{ or } -\frac{4}{3}$

$\therefore\ y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3},\ \ y=-1$

$\therefore\ a_1=-\frac{4}{3},\ \ a_2=0,\ \ b_1=\frac{5}{3},\ \ b_2=-1$

$\therefore\ a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2=0-\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$