1. 평행이동 $f:(x,\ y)\rightarrow(x+a,\ y+4)$ 에 의해 원 $x^2+y^2=1$ 을 이동하였더니 원점에서 원의 중심까지의 거리가 5 가 되었다. 이 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

평행이동 $f:(x,\ y)\rightarrow(x+a,\ y+4)$ 는
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로
4 만큼 평행이동하는 것이므로
원 $x^2+y^2=1$ 을 평행이동하면 원의 중심
$(0,\ 0)$ 은 $(a,\ 4)$ 로 옮겨진다.
이 때, 두 점 $(0,\ 0)$ 과 $(a,\ 4)$ 의 거리가 5 이므로
$\sqrt{a^2+4^2}=5$
위의 식의 양변을 제곱하면
$a^2+16=25,\ a^2=9$
그런데 $a>0$ 이므로 $a=3$

2. 다음은 점 P$(a,\ b)$ 의 직선 $y=x$ 에 대해 대칭인 점 Q의 좌표 $(x,\ y)$ 를 구하는 과정이다.
$\boxed{}$ 에 알맞은 말을 차례대로 써 넣어라.

> (1) $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점 $\left(\dfrac{x+a}{2},\ \dfrac{y+b}{2}\right)$ 은 직선
> $\boxed{}$ 위에 있으므로 $\dfrac{y+b}{2}=\dfrac{x+a}{2}$
> $\therefore x-y=b-a \cdots ①$
> (2) 직선 PQ 는 직선 $y=x$ 에 수직이므로
> $\dfrac{y-b}{x-a}=\boxed{}$
> ①, ② 를 연립하여 x , y 를 구하면
> $x=\boxed{}$, $y=\boxed{}$이다.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

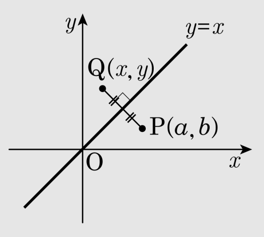
▷ 정답: $y=x$

▷ 정답: -1

▷ 정답: b

▷ 정답: a

해설



3. 포물선 $y = x^2 - 2x$ 를 $f\ :\ (x,\ y) \to (x - a,\ y - 1)$ 에 의하여 평행이동한 곡선과 직선 $y = 2x$ 와의 두 교점이 원점에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = x^2 - 2x$ 를 주어진 조건에 의하여
평행이동하면 $(y + 1) = (x + a)^2 - 2(x + a)$
$y = x^2 + (2a - 2)x + a^2 - 2a - 1$
이 곡선이 직선 $y = 2x$ 와 접하므로
y 에 $2x$ 를 대입하여 정리하면
$x^2 + (2a - 4)x + a^2 - 2a - 1 = 0$ 이고
이 방정식의 두 근이 두 교점이 된다.
두 교점의 x좌표를 $x_1,\ x_2$ 라 하면
$x_1 + x_2 = -(2a - 4)$
$\dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{-(2a - 4)}{2} = 0$ 이므로 a 의 값은 2

4. 원 $x^2+y^2+ax+by=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식이 $x^2+y^2+(2-b)x+(2a-4)y=0$ 일 때, 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

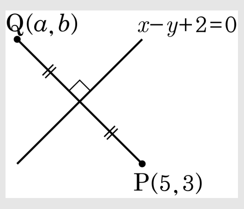
원 $x^2+y^2+ax+by=0$ 을
y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x)^2+y^2+a(-x)+by=0$
즉, $x^2+y^2-ax+by=0$
이것이 $x^2+y^2+(2-b)x+(2a-4)y=0$ 과
같으므로 계수를 비교하면
$-a=2-b,\ b=2a-4$
두 식을 연립하여 풀면 $a=6,\ b=8$
$\therefore\ a+b=6+8=14$

5. 직선 $x-y+2=0$ 에 관하여 점 $\mathrm{P}(5,\ 3)$ 과 대칭인 점을 $\mathrm{Q}(a,\ b)$ 라 할 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=7$

해설



$x-y+2=0$ 에 관하여 점 $\mathrm{P}(5,\ 3)$ 과 대칭인 점을 $\mathrm{Q}(a,\ b)$ 라면

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점 $\left(\frac{a+5}{2},\ \frac{b+3}{2}\right)$ 이

직선 위에 있으므로 대입하면

$\frac{a+5}{2}-\frac{b+3}{2}+2=0$

$\rightarrow\ a-b+6=0\cdots$㉠

($\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 기울기)$\times 1=-1$ 이므로

($\because\ \overline{\mathrm{PQ}}$ 와 직선이 수직)

$\frac{b-3}{a-5}\times 1=-1\ \rightarrow\ a+b-8=0\cdots$㉡

㉠, ㉡ 에서 $a=1,\ b=7$

$\therefore\ ab=7$