

1. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x + a, y + 4)$ 에 의해 원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 이동하였더니 원점에서 원의 중심까지의 거리가 5 가 되었다. 이 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x + a, y + 4)$ 는
 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로
4 만큼 평행이동하는 것이므로

원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 평행이동하면 원의 중심
 $(0, 0)$ 은 $(a, 4)$ 로 옮겨진다.

이 때, 두 점 $(0, 0)$ 과 $(a, 4)$ 의 거리가 5 이므로

$$\sqrt{a^2 + 4^2} = 5$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$a^2 + 16 = 25, a^2 = 9$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 3$

2. 다음은 점 $P(a, b)$ 의 직선 $y = x$ 에 대해 대칭인 점 Q 의 좌표 (x, y) 를 구하는 과정이다.

에 알맞은 말을 차례대로 써 넣어라.

(1) $\overline{PQ}$ 의 중점 $\left(\frac{x+a}{2}, \frac{y+b}{2}\right)$ 은 직선

위에 있으므로 $\frac{y+b}{2} = \frac{x+a}{2}$

$\therefore x - y = b - a \cdots \textcircled{1}$

(2) 직선 PQ 는 직선 $y = x$ 에 수직이므로

$\frac{y-b}{x-a} = \text{$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 를 연립하여 x, y 를 구하면

$x = \text{}, y = \text{$ 이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

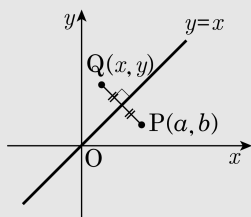
▷ 정답 : $y = x$

▷ 정답 : -1

▷ 정답 : b

▷ 정답 : a

해설



3. 포물선 $y = x^2 - 2x$ 를 $f : (x, y) \rightarrow (x-a, y-1)$ 에 의하여 평행이동한 곡선과 직선 $y = 2x$ 와의 두 교점이 원점에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = x^2 - 2x$ 를 주어진 조건에 의하여

$$\text{평행이동하면 } (y+1) = (x+a)^2 - 2(x+a)$$

$$y = x^2 + (2a-2)x + a^2 - 2a - 1$$

이 곡선이 직선 $y = 2x$ 와 접하므로

y 에 $2x$ 를 대입하여 정리하면

$$x^2 + (2a-4)x + a^2 - 2a - 1 = 0 \text{ 이고}$$

이 방정식의 두 근이 두 교점이 된다.

두 교점의 x 좌표를 x_1, x_2 라 하면

$$x_1 + x_2 = -(2a-4)$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-(2a-4)}{2} = 0 \text{ 이므로 } a \text{ 의 값은 } 2$$

4. 원 $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + (2-b)x + (2a-4)y = 0$ 일 때, 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 14

해설

원 $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ 을

y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(-x)^2 + y^2 + a(-x) + by = 0$$

$$\text{즉, } x^2 + y^2 - ax + by = 0$$

이것이 $x^2 + y^2 + (2-b)x + (2a-4)y = 0$ 과

같으므로 계수를 비교하면

$$-a = 2 - b, \quad b = 2a - 4$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 6, b = 8$

$$\therefore a + b = 6 + 8 = 14$$

5. 직선 $x - y + 2 = 0$ 에 관하여 점 $P(5, 3)$ 과 대칭인 점을 $Q(a, b)$ 라 할 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = 7$

해설

$x - y + 2 = 0$ 에 관하여 점 $P(5, 3)$ 과 대칭인 점을 $Q(a, b)$ 라면

$\overline{PQ}$ 의 중점 $\left(\frac{a+5}{2}, \frac{b+3}{2}\right)$ 이

직선 위에 있으므로 대입하면

$$\frac{a+5}{2} - \frac{b+3}{2} + 2 = 0$$

$$\rightarrow a - b + 6 = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$(\overline{PQ} \text{의 기울기}) \times 1 = -1$ 이므로

$(\because \overline{PQ} \text{와 직선이 수직})$

$$\frac{b-3}{a-5} \times 1 = -1 \rightarrow a + b - 8 = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $a = 1, b = 7$

$$\therefore ab = 7$$

