1. 두 실수 x, y에 대하여 $x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x - 8y + 5 = 0$일 때, $x + y$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x - 8y + 5$
$= x^2 - 2(2y - 1)x + 4y^2 - 4y + 1 + y^2 - 4y + 4$
$= x^2 - 2(2y - 1)x + (2y - 1)^2 + (y - 2)^2$
$= (x - 2y + 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$
$\therefore\ x - 2y + 1 = 0,\ y - 2 = 0$이므로
$y = 2,\ x - 4 + 1 = 0 \quad \therefore\ x = 3$
따라서 $x + y = 3 + 2 = 5$

2. 다음 방정식을 만족하는 실수 x, y의 합을 구하여라.

$$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

▷ 정답 : 3

해설

$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$에서 $x^2y^2+4x^2+y^2+4-8xy=0$
이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면
$(x^2y^2-4xy+4)+(4x^2 4xy+y^2)=0$
이 때, x, y가 실수이므로 $xy-2$, $2x-y$도 실수이다.
$\therefore xy-2=0 \quad \cdots$ ㉠,
$2x-y=0 \quad \cdots$ ㉡
㉡에서 $y=2x$이고, 이것을 ㉠에 대입하면 $x^2=1$
따라서, $x=1$일 때 $y=2$, $x=-1$일 때 $y=-2$
그러므로 x, y의 값은 $x=\pm1$, $y=\pm2$(복부호 동순)
따라서 x, y의 합은 $-3, 3$

3. 방정식 $2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$ 을 만족시키는 실수 $x,\ y$의 곱 xy를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$에서
$(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) = 0$
$(x + y)^2 + (x - 2)^2 = 0$
$x,\ y$가 실수이므로 $x + y = 0,\ x - 2 = 0$
$\therefore\ x = 2,\ y = -2$
$\therefore\ xy = -4$

4. $x^2+y^2-2y+1=0$을 만족하는 실수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2-2y+1=0$에서 $x^2+(y-1)^2=0$
$x,\ y$는 실수이므로 $x^2 \geq 0,\ (y-1)^2 \geq 0$
따라서, $x=0,\ y-1=0$이므로 $x=0,\ y=1$
$\therefore\ x+y=0+1=1$

5. 이차식 $f(x)$를 각각 $x-3$, $x+1$로 나눈 나머지는 같고, $f(1)=0$일 때, $\frac{f(4)}{f(-4)}=\frac{n}{m}$ (m, n은 서로소)이다. 이 때, $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$f(1)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$을 인수로 갖는다.

$\therefore\ f(x)=(x-1)(ax+b)$

$f(3)=f(-1)$ 이므로 $2(3a+b)=-2(-a+b)$

$\therefore\ a=-b$

$\frac{f(4)}{f(-4)}=\frac{3(4a+b)}{-5(-4a+b)}=\frac{-9b}{-25b}=\frac{9}{25}$

$\therefore\ m=25,\ n=9$

6. 다항식 $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + k$가 일차식 $x - 1$을 인수로 가질 때, 이 다항식 $f(x)$를 인수분해 하면?

① $(x-2)(x-1)(x+1)$　② $(x-1)x(x+2)$

③ $(x+1)(x-1)(x+2)$　④ $(x-2)(x-1)(x+2)$

⑤ $(x-2)(x+1)(x+2)$

해설

$f(x) = (x-1)Q(x) \quad \Rightarrow \quad f(1) = 0$

$\therefore \ f(1) = 2 + k = 0, \qquad \therefore \ k = -2$

즉, $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$\qquad\quad = (x-1)(x+1)(x+2)$

7. 다항식 $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 12$가 $x - 2$로 나누어 떨어지고 또, $x - 3$으로도 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어지려면
$f(2) = 24 + 4a + 2b + 12 = 0$
$\therefore\ 4a + 2b + 36 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠
또, $f(x)$ 가 $x - 3$ 으로 나누어 떨어지려면
$f(3) = 81 + 9a + 3b + 12 = 0$
$\therefore\ 9a + 3b + 93 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -13,\ b = 8$

8. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - k$ 가 $x - 2$를 인수로 가질 때, k를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$를 인수로 갖는다는 것은 $f(x)$가 $x - 2$로 나누어 떨어진다는 뜻이다.
즉, $f(2) = 0$을 만족시키는 k를 구하면,
$f(2) = 2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 - k = 0$
$\therefore\ k = 6$

9. 복소수 $z = a + bi$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

$(1 + i + z)^2 < 0 \qquad z^2 = c + 4i$

이 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$(1 + i + z)^2 < 0$ 에서 $1 + i + z$ 는 순허수이다.

$z = a + bi$ 라면

$1 + i + z = 1 + i + a + bi = (1 + a) + (1 + b)i$

이것이 순허수이므로 $1 + a = 0$, $a = -1$

$\therefore\ z = -1 + bi$

또한 $z^2 = c + 4i$ 에서 $(-1 + bi)^2 = c + 4i$

$1 - 2bi - b^2 = c + 4i$

$\therefore\ -2b = 4$, $1 - b^2 = c$

$\therefore\ b = -2,\ c = -3$

$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 = 14$

10. 양의 실수 a, b에 대하여 다음 복소수 중 $z = a(1+i) + b(1-i)$ (i는 허수단위) 의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $-3+i$　　② $2+3i$　　③ $5-2i$

④ $1-3i$　　⑤ $-4-2i$

해설

$z = (a+b) + (a-b)i \in A \ (a > 0,\ b > 0)$

① $a+b=-3,\ a-b=1$

$\therefore\ a=-1,\ b=-2$ (부적당)

② $a+b=2,\ a-b=3$

$\therefore\ a=\frac{5}{2},\ b=-\frac{1}{2}$ (부적당)

③ $a+b=5,\ a-b=-2$

$\therefore\ a=\frac{3}{2},\ b=\frac{7}{2}$ (양의 실수)

④ $a+b=1,\ a-b=-3$

$\therefore\ a=-1,\ b=2$ (부적당)

⑤ $a+b=-4,\ a-b=-2$

$\therefore\ a=-3,\ b=-1$ (부적당)

11. 복소수 z의 켤레복소수가 $\bar{z}$일 때, 등식 $(1-i)\bar{z}+2iz=3-i$를 만족시키는 z를 구하면?

① $z=-1-2i$　　② $z=-2-2i$　　③ $z=-3-2i$

④ $z=-3-3i$　　⑤ $z=-3-4i$

해설

복소수 $z=x+yi(x, y$는 실수$)$, $\bar{z}=x-yi$라 놓으면

(준식) $=(1-i)(x-yi)+2i(x+yi)=3-i$

$x-yi-xi-y+2xi-2y=3-i$

$(x-3y)+(x-y)i=3-i$

복소수의 상등에 의하여

$x-3y=3, x-y=-1$

$x=-3, y=-2$

$\therefore\ z=-3-2i$

12. 두 복소수 $\alpha = a - 2i$, $\beta = 5 + bi$에 대하여 $\alpha + \overline{\beta} = \overline{3 - 2i}$를 만족하는 실수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -6$

해설

$\alpha + \overline{\beta} = \overline{3 - 2i}$

$(a - 2i) + (5 - bi) = 3 + 2i$

$(a + 5) - (2 + b)i = 3 + 2i$

$\therefore\ a = -2, b = -4$

$\therefore\ a + b = -6$

13. m은 양의 정수이고, x에 관한 이차방정식 $x^2-(3+\sqrt{2})x+m\sqrt{2}-4=0$의 한 근은 정수이다. 이 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

정수근을 α라 하자

$\alpha^2-(3+\sqrt{2})\alpha+m\sqrt{2}-4=0$

$(m-\alpha)\sqrt{2}+\alpha^2-3\alpha-4=0$

$m=\alpha$ 그리고 $\alpha^2-3\alpha-4=0$

$(\alpha+1)(\alpha-4)=0$

$\alpha=-1$ 또는 $\alpha=4$

m이 양의 정수이므로 $\alpha=4$에서 $m=4$

14. x에 대한 이차방정식 $x^2 + px + q = 0$의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$이 되도록 유리수 p, q를 정할 때, $p + q$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2 + px + q = 0$의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$이고
p, q가 유리수이면 남은 한 근은 $2 - \sqrt{3}$이다.
두 근의 합 $-p = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$
$\therefore p = -4$
두 근의 곱 $q = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$
$\therefore p + q = -4 + 1 = -3$

15. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $-1+\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a=2$

▷ 정답: $b=-1$

해설

$x^2+ax+b=0$에 $x=-1+\sqrt{2}$를 대입하여 정리하면

$3-2\sqrt{2}+a(-1+\sqrt{2})+b=0$

$-a+b+3+(a-2)\sqrt{2}=0$

$-a+b+3=0$과 $a-2=0$에서 $a=2,\ b=-1$

16. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $2 + \sqrt{5}i$일 때, 실수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -36　② -18　③ 18　④ 24　⑤ 36

해설

a, b가 실수이므로
이차방정식의 한 근이 $2 + \sqrt{5}i$이면
다른 한 근은 $2 - \sqrt{5}i$이다.
근과 계수의 관계의 의하여
$-a = (2 + \sqrt{5}i)(2 - \sqrt{5}i) = 4$
$\therefore a = -4$
$b = (2 + \sqrt{5}i)(2 - \sqrt{5}i) = 9$
$\therefore ab = -36$

17. x의 이차방정식 $x^2 - 3px + 4q - 2 = 0$의 두 실근의 비가 $1:2$가 되도록 하는 실수 p, q에 대하여 q의 값의 범위는? (단, $p \neq 0$)

① $q \geq -\frac{1}{3}$　② $q > \frac{1}{2}$　③ $q \geq \frac{1}{2}$

④ $q > -\frac{1}{2}$　⑤ $q \geq \frac{2}{3}$

해설

두 근을 α, 2α라 하면

$\alpha + 2\alpha = 3p \quad \therefore \ \alpha = p$

$\alpha \cdot 2\alpha = 4q - 2 \quad \therefore \ \alpha^2 = 2q - 1$

따라서 $p^2 = 2q - 1$

한편 $\mathrm{D} > 0$에서 $9p^2 - 4(4q - 2) > 0$

$9(2q - 1) - 16q + 8 > 0$

$2q - 1 > 0$

$\therefore \ q > \frac{1}{2}$

18. 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근 α,β에 대하여 $(1+\alpha)(1+\beta)=2$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{2}{3}$인 관계가 성립한다고 할 때, $2p-q$의 값은?

① 1　② 3　③ 4　④ 6　⑤ 8

해설

근과 계수와의 관계에서
$\alpha+\beta=-p,\ \alpha\beta=q$
$(1+\alpha)(1+\beta)=2$에서
$1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta=2$
$\therefore\ 1-p+q=2\cdots\cdots$㉠
$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{2}{3}$에서
$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-p}{q}=-\frac{2}{3}$
$\therefore\ p=\frac{2}{3}q\cdots\cdots$㉡
㉠, ㉡에서 $p=2,\ q=3$
$\therefore\ 2p-q=1$

19. 이차방정식 $x^2 + 2(m-1)x - 2m - 6 = 0$의 근 중 양근의 절대값이 음근의 절대값보다 클 때 실수 m의 범위는 ?

① $m < 1$

② $-3 < m < 1$

③ $m < -3$ 또는 $m > 1$

④ $m > -3$

⑤ $m < -1$

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha + \beta > 0,\ \alpha\beta < 0$

($\because$ 양근의 절대값이 음근의 절대값보다 크다.)

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2(m-1) > 0 & \therefore\ m < 1 \\ \alpha\beta = -2m - 6 < 0 & \therefore\ m > -3 \end{cases}$$

$\therefore\ -3 < m < 1$

20. x에 대한 이차방정식 $x^2 - 3px + 4q + 2 = 0$의 두 근의 비가 1:2가 되도록 하는 실수 p, q에 대하여 다음 중 알맞은 q의 값으로 가장 작은 것은?

① -1　　② $-\frac{1}{2}$　　③ $\frac{1}{2}$　　④ 1　　⑤ 2

해설

두 근의 비가 $1:2$이므로 두 근을 α, 2α라 하면
근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + 2\alpha = 3p \cdots\cdots$ ㉠
$\alpha \cdot 3\alpha = 4q + 2 \cdots\cdots$ ㉡
㉠에서 $\alpha = p$ 이것을 ㉡에 대입하면
$2p^2 = 4q + 2 \quad \therefore p^2 = 2q + 1 \cdots\cdots$ ㉢
한편, p, q(실수)에서 주어진 방정식은
서로 다른 두 실근을 가져야 하므로
$D = (-3p)^2 - 4(4q + 2) > 0$
$\therefore\ 9p^2 - 16q - 8 > 0$
위 식을 ㉢에 대입하면 $(18q + 9) - 16p - 8 > 0$
$2q + 1 > 0 \quad \therefore q > -\frac{1}{2}$