1. 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $A \ominus B$와 $A \otimes B$을 다음과 같이 정의하기로 한다.

$A \ominus B = A - 3B$, $A \otimes B = (A + B)B$

$P = 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3$, $Q = x^3 + x^2y + xy^2$이라 할 때, $(P \ominus Q) \otimes Q$를 x, y에 관한 다항식으로 나타내면?

① $x^4y^2 + xy^5$ ② $x^4y^2 - xy^5$ ③ $x^3y^2 - xy^4$

④ $x^3y^2 + xy^4$ ⑤ $2x^3y^2 - xy^4$

해설

정의에 따라 $(P \ominus Q) \otimes Q$를 변형하면

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (P - 3Q) \otimes Q \\ &= (P - 3Q + Q)Q \\ &= (P - 2Q)Q \quad \cdots ①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P - 2Q \\ &= 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3 - 2(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= xy^2 - y^3\end{aligned}$$

이므로 ①식은

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (xy^2 - y^3)(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 - x^3y^3 \\ &\quad - x^2y^4 - xy^5 \\ &= x^4y^2 - xy^5\end{aligned}$$

2. 다항식 $f(x)$를 $2x^2+3x+2$로 나누었더니 몫이 $3x-4$이고, 나머지가 $2x+5$이었다. 이 때, $f(1)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

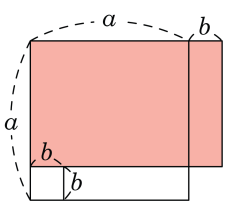
해설

$f(x)=(2x^2+3x+2)(3x-4)+(2x+5)$
$=6x^3+9x^2+6x-8x^2-12x-8+2x+5$
$=6x^3+x^2-4x-3$
$\therefore\ f(1)=6+1-4-3=0$

해설

$f(x)=(2x^2+3x+2)(3x-4)+(2x+5)$
$f(1)=(2+3+2)(3-4)+(2+5)=-7+7=0$

3. 다음 그림에서 색칠한 부분이 나타내고 있는 곱셈공식은 무엇인가?



① $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

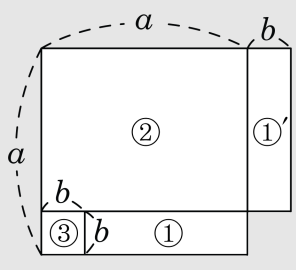
② $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

③ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

④ $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

⑤ $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$

해설



$(a+b)(a-b) = ①' + ②$

$①' = ①$이므로

$(a+b)(a-b) = ① + ② = a^2 - b^2$

$\therefore\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

4. 다음 곱셈공식을 전개한 것 중 바른 것은?

① $(x-y-1)^2 = x^2+y^2+1-2xy-2x-2y$

② $(a+b)^2(a-b)^2 = a^4-2a^2b^2+b^4$

③ $(-x+3)^3 = x^3-9x^2+27x-27$

④ $(a-b)(a^2+ab-b^2) = a^3-b^3$

⑤ $(p-1)(p^2+1)(p^4+1) = p^{16}-1$

해설

① $(x-y-1)^2 = x^2+y^2+1-2xy-2x+2y$

③ $(-x+3)^3 = -x^3+9x^2-27x+27$

④ $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

⑤ $(p-1)(p+1)(p^2+1)(p^4+1) = p^8-1$

5. $(x^3+ax+2)(x^2+bx+2)$를 전개했을 때, x^2과 x^3의 계수를 모두 0이 되게 하는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$(x^3+ax+2)(x^2+bx+2)$
$=x^5+bx^4+(a+2)x^3+(ab+2)x^2+(2a+2b)x+4$
(x^2의 계수)=(x^3의 계수)=0이므로
$ab+2=0,\ a+2=0$
따라서 $a=-2,\ b=1$
$\therefore a+b=-1$

6. $(2x^3-3x^2+3x+4)(3x^4+2x^3-2x^2-7x+8)$을 전개한 식에서 x^3의 계수는?

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

해설

$2x^3\times 8-3x^2\times(-7x)+3x\times(-2x^2)+4\times 2x^3=39x^3$

7. 두 다항식 A, B 에 대하여 $A+B=-x^3-2x^2+4x+5$, $2A-B=4x^3-x^2-x+1$ 일 때, 두 다항식 A, B 를 구하면?

① $A=x^3+x^2+x+2,\ B=-2x^3-3x^2+3x+3$

② $A=x^3-x^2+x+2,\ B=-2x^3-x^2+3x+3$

③ $A=x^3-x^2+x-2,\ B=-2x^3-x^2+3x+7$

④ $A=x^3-x^2-x+2,\ B=-2x^3-x^2+5x+3$

⑤ $A=3x^3-3x^2+3x+6,\ B=-4x^3+x^2+x-1$

해설

$A+B=-x^3-2x^2+4x+5\cdots$㉠
$2A-B=4x^3-x^2-x+1\cdots$㉡
(㉠ + ㉡) ÷ 3 : $A=x^3-x^2+x+2$
(2㉠ − ㉡) ÷ 3 : $B=-2x^3-x^2+3x+3$

8. 다항식 $x^5\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$의 차수는?

① 2차 ② 3차 ③ 6차 ④ 7차 ⑤ 8차

해설

$x^5\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$

$=x^2(x^2+1)(x^2+2x+3)$

$\therefore$ 6차 다항식

9. 다음은 연산법칙을 이용하여 $(x+3)(x+2)$를 계산한 식이다.

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2\\ &= (x^2+3x)+(2x+6)\\ &= x^2+(3x+2x)+6\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

위의 연산과정에서 사용한 연산법칙을 바르게 고른 것은?

① 교환법칙, 결합법칙

② 교환법칙, 분배법칙

③ 분배법칙, 결합법칙

④ 결합법칙, 분배법칙, 교환법칙

⑤ 연산법칙을 사용하지 않았다.

해설

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2 \quad (\text{분배})\\ &= (x^2+3x)+(2x+6) \quad (\text{분배})\\ &= x^2+(3x+2x)+6 \quad (\text{결합})\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

10. 다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3+4x^2+3x-2)\div(\square x^2+\square x+\square)=x+2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$\square x^2+\square x+\square=A$ 라 하면
$(x^3+4x^2+3x-2)\div A=x+2$
$\therefore\ A=(x^3+4x^2+3x-2)\div(x+2)$
$\therefore\ A=x^2+2x-1$ 이므로
$\square$ 안에 알맞은 수는 차례대로 $1,\ 2,\ -1$ 이다.

11. 다음 식 중에서 옳지 않은 것을 고르면?

① $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

② $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$

③ $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

④ $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

⑤ $(a^2+a+1)(a^2-a+1) = a^4-a^2+1$

해설

⑤ $(a^2+a+1)(a^2-a+1) = (a^2+1)^2-a^2$
$= a^4+a^2+1$

12. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$를 전개할 때, 각 항의 계수의 총합을 a, 상수항을 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 8 ② 15 ③ 24 ④ 36 ⑤ 47

해설

$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)(x^2+x=X(\text{치환}))$
$=(X-2)(X-12)$
$=X^2-14X+24$
$=(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$
$=x^4+2x^3-13x^2-14x+24$
$\therefore\ a=1+2-13-14+24=0,\ b=24$
$\therefore\ a+b=0+24=24$

해설

㉠ 각 항 계수의 총합 구하기
$x=1$ 대입, $a=0$
㉡ 상수항 구하기
$x=0$ 대입, $b=24$

13. $(10^5+2)^3$의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라.

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 26 ⑤ 28

해설

준식을 전개하면

$10^{15}+2^3+3\times2\times10^5(10^5+2)$

$=10^{15}+2^3+6\times10^{10}+12\times10^5$

$=10^{15}+10^{10}\times6+10^5\times12+8$

$\therefore\ 1+6+1+2+8=18$

14. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c=2$, $a^2+b^2+c^2=6$, $abc=-1$ 일 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^3+2(ab+bc+ca)$

$ab+bc+ca=-1$

$a^3+b^3+c^3$

$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$= 2\times(6-(-1))-3=11$

15. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ 일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 에 대입하면

$ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$

$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

$\frac{1}{4}=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

따라서 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{1}{4}$

16. $2^{16}-1$은 1과 10사이의 어떤 두 수로 나누어떨어진다. 이 때, 이 두 수의 합은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 임을 이용하여 $2^{16}-1$을 인수분해하면

$2^{16}-1=(2^8)^2-1^2$

$=(2^8+1)(2^8-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^4-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2^2-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2+1)(2-1)$

$=257\cdot17\cdot5\cdot3$

따라서 $2^{16}-1$을 나누었을 때 나누어 떨어지는 1과 10사이의 수

즉, 인수는 3과 5이고 이 두 수의 합은 8이다.

17. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=14(x>0)$일 때, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값은?

① 36 ② 44 ③ 52 ④ 68 ⑤ 82

해설

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=(x+\dfrac{1}{x})^2-2$이므로

$x+\dfrac{1}{x}=4\ (\because x>0)$

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=(x+\dfrac{1}{x})^3-3(x+\dfrac{1}{x})=52$

18. $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$이고 $abc=1$ 일 때, $(a^3+b^3+c^3)^2$의 값을 계산하면?

① 1 ② 4 ③ 9 ④ 16 ⑤ 25

해설

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc\\&=(a+b+c)\times 0+3abc=0+3\cdot(1)=3\\&\therefore (a^3+b^3+c^3)^2=9\end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca\ a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=0\\&\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0\\&\therefore a=b=c\rightarrow abc=a^3=b^3=c^3=1\\&(a^3+b^3+c^3)^2=(1+1+1)^2=9\end{aligned}$$

19. A를 B로 나눈 몫을 Q, 나머지를 R라 하고, Q를 B'으로 나눈 몫은 Q', 나머지는 R'이라 한다. A를 BB'으로 나눈 나머지는? (단, 모든 문자는 자연수이다.)

① $R+R'B$ ② $R'+RB$ ③ RR'

④ R ⑤ R'

해설

주어진 조건을 식으로 나타내면

$A = BQ + R$ ·····㉠

$Q = B'Q' + R'$ ·····㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$A = B(B'Q' + R') + R$

$= (BB')Q' + (R + R'B)$

$R + R'B$가 A를 BB'로 나눈 나머지가 되기 위해서는 $R + R'B < BB'$이어야 한다.

그런데 $R \le B-1$, $R' \le B'-1$이므로

$R + R'B \le (B-1) + (B'-1)B$

$= BB' - 1 < BB'$

따라서 A를 BB'으로 나눈 나머지는 $R + R'B$이다.

20. $x-y=1$ 이고 $x^2+y^2=-1$ 일 때, $x^{10}+y^{13}$ 의 값은 얼마인가?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ -2

해설

$x-y=1$ 에서 $y=x-1$
이것을 $x^2+y^2=-1$ 에 대입하면
$2x^2-2x+2=0$
$x^2-x+1=0$
양변에 $x+1$ 을 곱하면, $x^3+1=0$
$\therefore\ x^3=-1$
또 $x=y+1$ 을 $x^2+y^2=-1$ 에 대입하면
$2y^2+2y+2=0,\ y^2+y+1=0 \therefore\ y^3=1$
$\therefore\ x^{10}+y^{13}=(x^3)^3\cdot x+(y^3)^4\cdot y$
$=(-1)^3\cdot x+1^4\cdot y$
$=-(x-y)=-1$