1. 방정식 $|x| + |x - 1| = 2$의 해를 구하시오.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{2}$ 또는 -0.5

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$ 또는 1.5

해설

i) $x < 0$일 때,

$-x - (x - 1) = 2$이므로 $-2x + 1 = 2$

$\therefore \ x = -\frac{1}{2}$

ii) $0 \le x < 1$일 때,

$x - (x - 1) = 2$이므로 $0 \cdot x = 1$

$\therefore$ 해가 없다.

iii) $1 \le x$일 때,

$x + x - 1 = 2$이므로 $2x = 3$

$\therefore \ x = \frac{3}{2}$

(i), (ii), (iii) 에서 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}$

2. 다음 이차방정식의 해를 바르게 짝지은 것은?

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$
(2) $x^2-3\sqrt{2}x+6=0$

① (1) $\frac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
② (1) $\frac{3\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
③ (1) $\frac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{6}i}{2}$
④ (1) $\frac{1\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
⑤ (1) $\frac{4\pm 3i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용하여 푼다.

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$

$\therefore\ 5x^2-8x+4=0$

$$\therefore\ x=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{5}=\frac{4\pm 2i}{5}$$

(2) $$x=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{18-24}}{2}=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$$

3. 다음 이차방정식을 풀면?

$$(1-i)x^2+(1+i)x-2=0$$

① $x=-1$ 또는 $x=-i$

② $x=-1$ 또는 $x=-1-i$

③ $x=-1$ 또는 $x=-1+i$

④ $x=1$ 또는 $x=-1-i$

⑤ $x=1$ 또는 $x=-1+i$

해설

x^2 의 계수를 실수로 만들기 위해 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)^2x-2(1+i)=0$

$2x^2+2ix-2(1+i)=0$

$(x-1)\left\{x+(1+i)\right\}=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-1-i$

4. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+b-3=0$이 k의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a=1, b=2$ ② $a=0, b=3$ ③ $a=-1, b=2$

④ $a=0, b=2$ ⑤ $a=-1, b=3$

해설

중근을 가지려면, 편별식이 0이다.

$D' = (k-a)^2-(k^2+b-3)=0$

$\Rightarrow \quad -2ak+a^2-b+3=0$

모든 k 에 대해 성립하려면

$-2a=0,\ a^2-b+3=0$

$\therefore \quad a=0, b=3$

5. 이차방정식 $x^2 - mx + 91 = 0$의 두 근, α, β는 서로소이다. 이때, 실수 m의 값은? (단, α, β는 $\alpha > 1,\ \beta > 1$인 자연수)

① 10　　② 20　　③ 35　　④ 55　　⑤ 100

해설

근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha + \beta = m,\ \alpha\beta = 91$
α와 β가 서로소이고 자연수이므로
$(\alpha,\ \beta) = (1,\ 91)$ 또는 $(7,\ 13)$ 이다.
여기서 $\alpha > 1,\ \beta > 1$이므로
$(\alpha, \beta) = (7, 13)$
$\therefore m = \alpha + \beta = 20$

6. 실수 x, y, z가 $x+y+z=6$, $xy+yz+zx=9$를 만족할 때 x의 최대값을 M, 최소값을 m이라 한다. 이 때 $M-m$의 값을 구하면 ?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$y+z=6-x$,

$yz=9-x(y+z)=9-x(6-x)=(x-3)^2$

실수 y, z를 두 근으로 하는 이차방정식을 만들면

$t^2-(6-x)t+(x-3)^2=0$

$D=(6-x)^2-4(x-3)^2 \geq 0$에서 $x(x-4) \leq 0$

$\therefore\ 0 \leq x \leq 4$

$M=4,\ m=0 \quad \therefore\ M-m=4$

7. 이차방정식 $x^2+2ax+3b=0$ 의 한 근이 $3-ai$ 일 때, 실수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하면?(단, $a \neq 0, i=\sqrt{-1}$)

① 12 ② 6 ③ -6 ④ -12 ⑤ -18

해설

이차방정식 $x^2+2ax+3b=0$ 의 한 근이 복소수 $3-ai$ 이므로,
다른 한 근은 켤레근인 $3+ai$ 이다.
두 근의 합은 $(3-ai)+(3+ai)=-2a$ 이므로,
$-2a=6 \quad \therefore \ a=-3$ 이다.
두 근의 곱은 $(3-ai)(3+ai)=3b$ 이므로,
$9+a^2=3b,\ 9+(-3)^2=18=3b \quad \therefore \ b=6$
$\therefore \ ab=-18$

8. 이차함수 $y = x^2 + (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$ ② $-1 < k < 8$ ③ $0 < k < 9$

④ $1 < k < 9$ ⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k-3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
$D = (k-3)^2 - 4k < 0$
$k^2 - 10k + 9 < 0$, $(k-1)(k-9) < 0$
$\therefore\ 1 < k < 9$

9. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -4 를 가지며 점 $(1,\ 2)$ 를 지난다. 이 때, $a - b - c$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

꼭짓점이 $(3,\ -4)$ 이므로 $y = a(x-3)^2 - 4$

$(1,\ 2)$ 를 대입하면

$2 = 4a - 4$

$\therefore a = \dfrac{3}{2}$

$y = \dfrac{3}{2}(x-3)^2 - 4 = \dfrac{3}{2}x^2 - 9x + \dfrac{19}{2}$

$a = \dfrac{3}{2},\ b = -9,\ c = \dfrac{19}{2}$

$\therefore\ a - b - c = \dfrac{3}{2} - (-9) - \dfrac{19}{2} = 1$

10. 실수 x, y 가 방정식 $x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 6 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

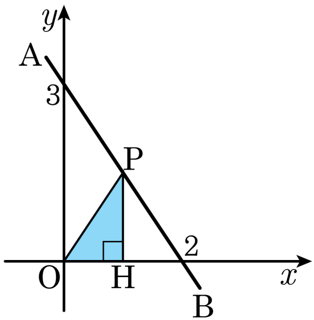
x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2yx + 2y^2 + y - 6 = 0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = y^2 - \left(2y^2 + y - 6\right) \geq 0$$

$y^2 + y - 6 \leq 0$, $(y+3)(y-2) \leq 0$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.

11. 선분 AB 위의 한 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라고 할 때, $\triangle$POH 의 넓이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 0.75

해설

$\overline{\mathrm{AB}}$ 를 지나는 직선은 두 점 (0, 3) , (2, 0) 을 지나므로

$y=-\frac{3}{2}x+3$

H 점의 좌표를 $(a,\ 0)$ 이라고 하면, 점 P 의 좌표는 $\left(a, -\frac{3}{2}a+3\right)$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{POH} &= \frac{1}{2}\times a\times\left(-\frac{3}{2}a+3\right)\\ &= -\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{2}a\\ &= -\frac{3}{4}(a^2-2a+1-1)\\ &= -\frac{3}{4}(a-1)^2+\frac{3}{4}\end{aligned}$$

따라서 최댓값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

12. 어떤 축구 선수가 축구공을 찼을 때, t 초 후의 높이를 $h\mathrm{m}$ 라고 하면 $h=-\frac{1}{2}t^2+3t$ 의 관계가 성립한다. 축구공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이를 구하여라.

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : $\frac{9}{2}$ m

해설

$h=-\frac{1}{2}t^2+3t$ 에서 $h=-\frac{1}{2}(t-3)^2+\frac{9}{2}$ 이다.

따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 $\frac{9}{2}\mathrm{m}$ 이다.

13. 어떤 공장에서 A, B의 두 제품을 생산하고 있다. A제품의 생산량은 작년에 비하여 20% 증가하였고, B제품은 25% 증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B제품의 생산량을 구하면?

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 40 개

해설

작년 두 제품의 생산량을 차례로 a, b라고 하면,
올해는 각각 $1.2a$, $1.25b$이다.
$a+b=70$, $1.2a+1.25b=86$
연립하여 풀면, $a=30$, $b=40$

14. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $3\sqrt{2}$　② 4　③ $-3\sqrt{2}$

④ -4　⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$에서

$(x-y)(x-2y) = 0 \quad \therefore x = y$ 또는 $x = 2y$

ⅰ) $x = y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2, \ y = \pm 2$

ⅱ) $x = 2y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{2}, \quad x = \pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x + y = 4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

15. 방정식 $2xy-4x-y=4$를 만족하는 양의 정수 $x,\ y$를 구하면 $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$,

$\begin{cases} x=\gamma \\ y=\delta \end{cases}$ 이다.

$\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

주어진 식을 변형하면 $(2x-1)(y-2)=6$

조건에서 $x,\ y$가 양의 정수이므로

$2x-1,\ y-2$도 각각 정수이고 특히 $2x-1$은 양의 홀수이다.

$\therefore\ \begin{cases} 2x-1=1 \\ y-2=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} 2x-1=3 \\ y-2=2 \end{cases}$

$\therefore\ \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases},\ \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma+\delta=15$