1. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$의 근이 아닌 것은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

대입하여 성립하는 수들을 찾아내어 조립제법으로 인수분해를 하면

$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$

$(x-1)(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = 0$

$(x-1)(x-2)(x^2 + 4x + 3) = 0$

$(x-1)(x-2)(x+3)(x+1) = 0$

$\therefore\ x = -3, -1, 1$ 또는 2

2. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서

$x^2 = t$ 로 놓으면

$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$

$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$

(i) $t = 4$ 일 때, $x^2 = 4$

$\therefore\ x = \pm 2$

(ii) $t = 9$ 일 때, $x^2 = 9$

$\therefore\ x = \pm 3$

따라서 모든 해의 합은

$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

3. 다음 중 사차방정식 $x^4 + x^2 + 1 = 0$의 근에 해당하는 것을 모두 고르면?

① $\dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ ② $\dfrac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ ③ $\dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$

④ $1 + \sqrt{3}i$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3} - i}{2}$

해설

$x^4 + x^2 + 1 = 0$을 변형하면

$x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = 0,$

$(x^2 + 1)^2 - x^2 = 0$

$(x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) = 0,$

$x^2 + x + 1 = 0$ 또는 $x^2 - x + 1 = 0$

$\therefore\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

4. 삼차방정식 $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma$의 값은?

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

해설

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = -\frac{(-8)}{1} = 8$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} = \frac{17}{1} = 17$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{d}{a} = -\frac{(-10)}{1} = 10$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

$$= (8)^2 - 2 \cdot (17) = 30$$

$$-2\alpha\beta\gamma = -2 \cdot 10 = -20$$

$$\therefore \ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma = 10$$

5. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ ㉡ $\omega^2 = 1$

㉢ $\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 2$ ㉣ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

㉤ $\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㉠, ㉢ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉢, ㉣, ㉤ ⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$x^3 - 1 = 0,$

$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0,$

$\omega^2 = -1 - \omega \cdots ㉠, ㉡$

$\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$

$= (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots ㉢$

$\omega^{1005} + \omega^{1004}$

$= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2$

$= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots ㉣$

$\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$

$= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots ㉤$

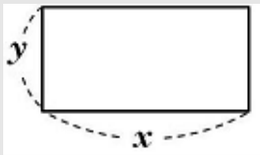
6. 가로의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를
각각 $x$cm, $y$cm 라 하면



$x = y + 5$ ……㉠
또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로
$2(x + y) = 34$ 즉, $x + y = 17$ ……㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$y + 5 + y = 17$, $2y = 12$
$\therefore\ y = 6$
$y = 6$ 을 ㉠에 대입하면 $x = 11$
$\therefore\ xy = 11 \times 6 = 66$

7. 방정식 $x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$을 만족하는 두 실수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2+2x+1+y^2-4x+4=0$ 에서
$(x+1)^2+(y-2)^2=0$
$x,\ y$ 는 실수이므로 $x=-1,\ y=2$
$\therefore\ x+y=-1+2=1$

8. 방정식 $2xy-4x-y=4$를 만족하는 양의 정수 x, y를 구하면 $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$, $\begin{cases} x=\gamma \\ y=\delta \end{cases}$ 이다.

$\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

주어진 식을 변형하면 $(2x-1)(y-2)=6$

조건에서 x, y가 양의 정수이므로

$2x-1$, $y-2$도 각각 정수이고 특히 $2x-1$은 양의 홀수이다.

$\therefore \begin{cases} 2x-1=1 \\ y-2=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} 2x-1=3 \\ y-2=2 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma+\delta=15$

9. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때, ab의 값은?

$$x^3+x^2-5x+3=0,\ x^3+2x^2+ax+b=0, x^2+bx+a=0$$

① -1 ② 3 ③ $-\frac{9}{4}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $-\frac{81}{16}$

해설

$x^3+x^2-5x+3=0$의 좌변을 인수분해하면 $(x-1)^2(x+3)=0 \therefore\ x=1$ 또는 $x=-3$

(i) 공통근이 $x=1$인 경우 나머지 두 방정식에 $x=1$을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는 $a,\ b$값은 없다.

(ii) 공통근이 $x=-3$인 경우 다른 두 방정식은 $x=-3$을 근으로 하므로 $\{-27+18-3a+b=0\}$ ……㉠

$\{9-3b+a=0\}$……㉡

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면 $a=-\frac{9}{4},\ b=\frac{9}{4},\ ab=-\frac{81}{16}$

10. 사차방정식 $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$의 근 중에서 제일 큰 근을 α, 제일 작은 근을 β라 할 때, $\alpha - \beta$의 값은?

① $\sqrt{5}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $1 - \sqrt{5}$

④ $2 - \sqrt{5}$ ⑤ $3 - \sqrt{5}$

해설

양근을 x^2으로 나누면

$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x}^2 = 0$

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$

$x + \frac{1}{x} = t$라 하면

$t^2 - 5t + 6 = 0 \rightarrow t = 2,\ 3$

i) $t = 2$일 때

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$\therefore\ x = 1$

ii) $t = 3$일 때

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$\therefore\ x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ \alpha - \beta = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

11. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y$에 대하여 $x + y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$에서

$(x-y)(x-2y) = 0 \quad \therefore x = y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2,\ y = \pm 2$

ii) $x = 2y$일 때

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{2}, \quad x = \pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x + y = 4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

12. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ xy=12 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x+y=u$, $xy=v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2-2v=25 \\ v=12 \end{cases}$$

$\therefore\ u=\pm 7,\ v=12$

따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x+y=7 & \cdots ㉠ \\ xy=12 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

또는 $\begin{cases} x+y=-7 & \cdots ㉢ \\ xy=12 & \cdots ㉡ \end{cases}$

(i) ㉠, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2-7t+12=0$ 의 두 근이므로 $x=3,\ y=4$ 또는 $x=4,\ y=3$

(ii) ㉢, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2+7t+12=0$ 의 두 근이므로 $x=-3,\ y=-4$ 또는 $x=-4,\ y=-3$

(i), (ii)로부터 구하는 모든 해의 합은 0