1. 다음 중 집합 $\{1,\ 2,\ 4\}$ 의 진부분집합인 것을 모두 구하여라.

㉠ $\varnothing$
㉡ $\{1,\ 2\}$
㉢ $\{x \mid x$ 는 4의 약수$\}$
㉣ $\{x \mid x$ 는 5보다 작은 자연수$\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉡

해설

$\{1,\ 2,\ 4\}$ 의 진부분집합은 $\{1,\ 2,\ 4\}$ 의 부분집합 중 $\{1,\ 2,\ 4\}$ 를 제외한 나머지 부분집합이다.

㉢ $\{x \mid x$는 4 의 약수$\} = \{1,\ 2,\ 4\}$ 이다. 진부분집합은 자신을 제외한 것이므로 진부분집합이 아니다.

㉣ $\{x \mid x$는 5 보다 작은 자연수$\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 이다. 따라서 $\{1,\ 2,\ 4\}$ 의 부분집합이 아니다.

2. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{2,\ 3,\ 5,\ 6\}$, $B = \{x \mid x\text{는 10의 약수}\}$ 일 때, $A \cup B$ 는?

① $\{2,\ 5\}$ ② $\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$

③ $\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6\}$ ④ $\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10\}$

⑤ $\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10\}$

해설

$A = \{2,\ 3,\ 5,\ 6\}$, $B = \{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$

$\therefore\ A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10\}$

3. $A=\{1,2,a+2\}$, $B=\{b-1,3,5\}$ 에 대하여 $A\cap B=\{2,5\}$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$A\cap B=\{2,5\}$ 이려면, $a+2=5$, $b-1=2$ $\therefore a=3, b=3$

$\therefore\ a+b=6$

4. 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b+c=9$일 때 abc의 최댓값은?

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

해설

$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$에서 $9 \geq 3\sqrt[3]{abc}$,
$3 \geq \sqrt[3]{abc}$, $27 \geq abc$

5. 함수 $y = 2x - 2$ 의 역함수를 구하면?

① $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ② $y = \frac{1}{2}x + 1$ ③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

④ $y = \frac{1}{2}x + 2$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

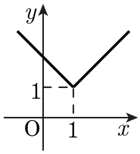
해설

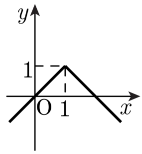
$y = 2x - 2$ 를 x 에 대하여 풀면

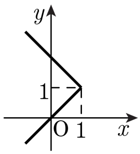
$x = \frac{1}{2}y + 1$ x 와 y 를 바꾸면 구하는 역함수는

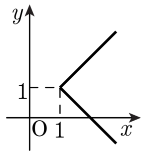
$\therefore\ y = \frac{1}{2}x + 1$

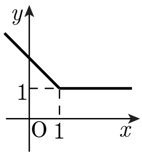
6. 다음 중 함수 $y = |x-1| + 1$ 의 그래프의 모양으로 가장 적당한 것은?

①


②


③


④


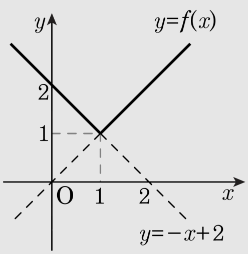
⑤


해설

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & (x \geq 1) \\ 1-x & (x < 1) \end{cases}$$ 이므로

$$y = \begin{cases} (x-1)+1 = x & (x \geq 1) \\ 1-x+1 = -x+2 & (x < 1) \end{cases}$$

따라서 이 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



7. $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}\neq 0$일 때, $\frac{x+y}{x-y}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}\neq 0$$

$$\therefore\ x=\frac{3}{2}y$$

$$\therefore\ \frac{x+y}{x-y}=\frac{\frac{3}{2}y+y}{\frac{3}{2}y-y}=5$$

8. 다음 중 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 $y = \sqrt{-x}$의 그래프와 겹쳐질 수 없는 것은?

① $y = -\sqrt{1-x}+1$　　② $y = \sqrt{x}-1$

③ $y = \sqrt{x-1}+3$　　④ $y = -\sqrt{-x+2}+2$

⑤ $y = \sqrt{-2x+1}-1$

해설

⑤ $y = \sqrt{ax+b}+c$에서 a의 계수가 다르면 평행이동 또는 대칭이동에 의해 겹쳐지지 않는다.

9. 8 개의 축구팀이 서로 한 번씩 경기를 할 때, 열리는 총 경기의 수는?

① 16 ② 24 ③ 28 ④ 36 ⑤ 42

해설

8 개 팀 중 2 개팀을 고르는 방법 수와 같다.

$\therefore\ {}_8C_2 = 28$

10. 다항식 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $g(g(x)) = x$ 이고 $g(1) = 0$ 일 때, $g(-1)$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$g(x)$ 가 n 차 다항식이라 하면
$g\left(g(x)\right)$ 의 차수는 n^2 이다.
모든 실수 x 에 대하여 $g(g(x)) = x$ 이므로
양변의 차수를 비교하면 $n^2 = 1$
$\therefore n = 1$ ($\because n$ 은 자연수)
즉, $g(x)$ 는 일차다항식이므로
$g(x) = ax + b$ 라 하면 $g(1) = 0$ 이므로
$a + b = 0$, 즉 $b = -a$
$\therefore g(x) = ax + b = ax - a$
$g(g(x)) = g(ax - a) = a(ax - a) - a$
$= a^2x - a^2 - a = x$
이 식은 x 에 대한 항등식이므로
$a^2 = 1$, $-a^2 - a = 0$
$\therefore a = -1$
즉, $g(x) = -x + 1$ 이므로 $g(-1) = 2$

11. 함수 $f(x)$가 $f(2x+1)=3x+2$를 만족할 때, $f(3)$의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(2x+1)=3x+2$ 에서 $2x+1=3$ 이므로
$x=1$ 을 대입하면
$f(2\cdot 1+1)=f(3)=3\cdot 1+2=5$

12. $(a+b)(p+q+r)(x+y)$ 를 전개하였을 때, 모든 항의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 12 개

해설

a, b 중 한 개를 택하는 방법 : 2 가지
p, q, r 중 한 개를 택하는 방법 : 3 가지
x, y 중 한 개를 택하는 방법 : 2 가지
전개했을 때 모든 항의 개수는
$2\times3\times2=12$ (개)

13. 216 과 360 의 공약수의 개수는 모두 몇 개인가?

① 8 개　② 9 개　③ 12 개　④ 15 개　⑤ 16 개

해설

두 수의 공약수는 두 수의 최대공약수의 약수이므로

$216 = 2^3 \times 3^3$,

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ 에서 G.C.D.는 $2^3 \times 3^2$

따라서 공약수의 개수는 $(3+1)(2+1) = 12$

14. 1, 2, 3 으로 만들 수 있는 세 자리의 자연수는 27개가 있다. 이 중에서 다음 규칙을 만족시키는 세 자리의 자연수의 개수를 구하여라.

(가) 1 바로 다음에는 3 이다.

(나) 2 바로 다음에는 1 또는 3 이다.

(다) 3 바로 다음에는 1 , 2 또는 3 이다.

▶ **답 :** ____________ 가지

▷ **정답 :** 13 가지

해설

조건에 맞는 세 자리수는 131, 132, 133, 213, 231, 232, 233, 313, 321, 323, 331, 332 ,333 이므로 13가지이다.

15. 남학생 4 명, 여학생 3 명이 한 줄로 서서 등산을 할 때, 특정인 2 명이 이웃하여 서는 방법은 몇 가지인가?

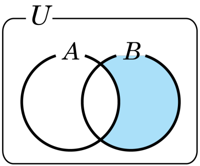
① $7!$ ② $7! \times 2!$ ③ $6! \times 2!$

④ $6!$ ⑤ $5! \times 2!$

해설

특정인 2 명을 한 묶음으로 생각하여 6 명을 일렬로 세우는 방법의 수가 $6!$,
묶음 안에서 2 명이 자리를 바꾸는 방법의 수가 $2!$ 이므로, 구하는 경우의 수는 $6! \times 2!$ (가지)

16. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 것이 <u>아닌</u> 것은?



① $B-A$

② $A^c \cap B$

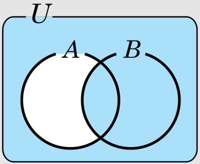
③ $A^c \cup B$

④ $B-(A \cap B)$

⑤ $(A \cup B)-A$

해설

③ $A^c \cup B$를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



17. 자연수의 집합 N에서 자연수 k의 배수의 집합을 N_k로 나타낼 때, $(N_{18} \cup N_{12}) \subset N_k$를 만족하는 k의 최댓값을 구하라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 6

해설

$N_{18} \cup N_{12}$

$= \{18,\ 36,\ 54,\ 72, \cdots\}$

$\cup \{12,\ 24,\ 36,\ 48,\ 60,\ 72,\ \cdots\}$

$= \{12,\ 18,\ 24,\ 36,\ 48,\ 54,\ 60,\ \cdots\} \subset N_k$

$\therefore k$의 최댓값은 6

18. 다음 중 그 역이 거짓인 명제를 찾으면?

① 두 집합 A, B 에 대하여 $A \supset B$ 이면 $A \cup B = A$ 이다.

② $x > 0$ 이고 $y > 0$ 이면 $x + y > 0$ 이다.

③ x 가 3 의 배수이면 x 는 9 의 배수이다.

④ $xz = yz$ 이면 $x = y$ 이다.

⑤ $x^2 + y^2 \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.

해설

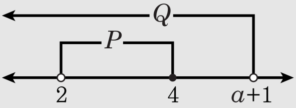
① 두 집합 A, B 에 대하여 $A \supset B$ 이면 $A \cup B \neq A$ 이다. (참)
② $x \leq 0$ 또는 $y \leq 0$ 이면 $x + y \leq 0$ 이다. $\Rightarrow$ 반례 : $x = -3, \quad y = 5$ (거짓)
③ x 가 3 의 배수가 아니면 x 는 9 의 배수가 아니다. (참)
④ $xz \neq yz$ 이면 $x \neq y$ 이다. (참)
⑤ $x^2 + y^2 = 0$ 이면 $x = 0$ 이고 $y = 0$ 이다. (참)

19. 두 조건 $p : 2 < x \leq 4, q : x < a+1$에 대하여 p는 q 이기 위한 충분조건 일 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a > 3$

해설



$p \rightarrow q$이므로 $a+1 > 4 \Rightarrow a > 3$

20. $2x-y+z=0$, $x-2y+3z=0$일 때, $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}$의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$이다. 이때, $m+n$의 값을 구하여라.(단, m, n은 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2x-y+z=0 \cdots$ ㉠

$x-2y+3z=0 \cdots$ ㉡

㉠ $\times 2-$ ㉡ $: 3x=z$

$\therefore x=\frac{z}{3}, \ y=\frac{5z}{3}$

여기서 $x=k$ 라 하면 $y=5k, \ z=3k$

따라서 $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}=\frac{k^2-5k^2+25k^2}{k^2+25k^2+9k^2}=\frac{3}{5}$ $\therefore m=5, \ n=3$

$\therefore m+n=8$

21. 수질오염의 정도를 수치로 나타내는 한 방법으로 생물학적 지표가 사용된다. 이 지표는 유색생물의 수가 X, 무색생물의 수가 Y일 때, $\dfrac{Y}{X+Y} \times 100(\%)$로 정의된다. 지난 달 수질검사에서 어떤 호수의 생물학적 지표는 $10(\%)$이었다. 이번 달에 이 호수의 수질을 검사한 결과, 지난 달에 비해 유색생물의 수는 2배, 무색생물의 수는 3배가 되었다. 이번 달 이 호수의 생물학적 지표는 몇 퍼센트$(\%)$ 인가?

① 약 14.3% ② 약 15.2% ③ 약 16.4%

④ 약 17.1% ⑤ 약 18.5%

해설

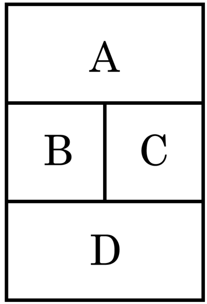
지난 달 유색 생물의 수를 X, 무색 생물의 수를 Y라 하면 $\dfrac{Y}{X+Y} \times 100 = 10$

따라서, $\dfrac{Y}{X+Y} = \dfrac{1}{10}$에서 $X = 9Y$

한편, 이번 달의 유색 생물의 수는 $2X$, 무색 생물의 수는 $3Y$이므로 이번 달의 생물학적 지표는

$$\frac{3Y}{2X+3Y} \times 100 = \frac{3Y}{2 \cdot 9Y + 3Y} \times 100$$
$$= \frac{1}{7} \times 100 \fallingdotseq 14.3(\%)$$

22. 원재가 가입한 동아리는 이 동아리를 상징하는 깃발을 검정, 초록, 빨강의 세 가지 색을 모두 사용하여 다음 그림과 같은 네 영역으로 구분하여 칠하려고 한다. 서로 다르게 칠하는 방법의 수를 구하여라.



▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 6 가지

해설

A, B, C, D 의 순서대로 색을 칠한다고 할 때, A 의 영역을 칠하는 방법의 수는 검정, 초록, 빨강의 3 가지이다. 이런 각 경우에 대하여 B 의 영역을 칠하는 방법은 3 가지 색 중에서 A 의 영역을 칠한 색을 제외한 2 가지이고, C 의 영역을 칠하는 방법의 수는 A, B 의 두 영역을 칠한 색을 제외한 1 가지이다.
마지막으로 D 의 영역을 칠하는 방법의 수는 B, C 의 두 영역을 칠한 색을 제외한 1가지 방법이다. 따라서 구하는 방법의 수는 $3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$ (가지)

23. 다음은 “실수를 계수로 갖는 세 개의 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$, $bx^2+2cx+a=0$, $cx^2+2ax+b=0$ 중 적어도 하나는 실근을 갖는다”는 것을 증명한 것이다. 위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞는 부등호를 차례대로 쓰면?

증명

주어진 방정식이 모두 허근을 갖는다고 가정하면
b^2-ac (가) 0 , c^2-ab (가) 0 , a^2-bc (가) 0
세 식을 같은 변끼리 더하면
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$ (나) 0
좌변을 변형하면
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$
$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$ (나) $0\cdots$ ㉠
그런데 $a,\ b,\ c$ 는 실수이므로
$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$(다)$0\cdots$ ㉡
따라서, ㉡은 ㉠에 모순이므로 세 방정식 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.

① <, <, ≥ ② <, <, > ③ <, >, <
④ ≥, ≥, ≤ ⑤ ≥, ≤, ≥

해설

주어진 방정식이 모두 허근을 갖는다면
$b^2-ac<0,\ c^2-ab<0,\ a^2-bc<0$ (가정)
세 식을 같은 변끼리 더하면
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac<0$
좌변을 변형하면
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$
$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}<0\cdots$ ㉠
그런데 $a,\ b,\ c$ 는 실수이므로
$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0\cdots$ ㉡
따라서, ㉡은 ㉠에 모순이므로 세 방정식 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.

24. 세 실수 x, y, z에 대하여 $x+\frac{1}{y}=1$, $y+\frac{1}{z}=1$이 성립할 때, xyz의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ -2 ⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$x+\frac{1}{y}=1\cdots$①, $y+\frac{1}{z}=1\cdots$②

①에서 $\frac{1}{y}=1-x$, $y=\frac{1}{1-x}$

이것을 ②에 대입하면

$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{z}=1$, $z=-\frac{1-x}{x}$

$\therefore\ xyz=x\cdot\frac{1}{1-x}\cdot\left(-\frac{1-x}{x}\right)=-1$

25. 집합 $D=\{x\mid -2a\le x\le a\}$ 에서 집합 $R=\{x\mid x$ 는 실수$\}$ 로의 함수 f 가 $f(x)=x^2+b$ 이고 $f(D)=D$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하면? (단, $ab\neq 0$)

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{3}{5}$

해설

$a\ge -2a$ 이므로 $a>0$

그림에서

$f(0)=b=-2a\cdots$ ㉠

$$\begin{aligned} f(-2a) &= 4a^2+b \\ &= a\cdots \text{㉡} \end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$a=\frac{3}{4},\ b=-\frac{3}{2}$

$\therefore a+b=-\frac{3}{4}$