

1. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(3x + \frac{2}{y}\right) \left(y + \frac{6}{x}\right)$ 의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$$\left(3x + \frac{2}{y}\right) \left(y + \frac{6}{x}\right) = 20 + 3 \left(xy + \frac{4}{xy}\right)$$

산술기하조건을 사용하면

$$xy + \frac{4}{xy} \geq 2 \sqrt{xy \times \left(\frac{4}{xy}\right)} = 4$$

$$\therefore \text{최솟값} : 20 + 3 \times 4 = 32$$

2. $x > 3$ 일 때 $\frac{3}{x-3} + 2 + 3x$ 의 최솟값은?

① 3

② 5

③ 12

④ 15

⑤ 17

해설

$$\frac{3}{x-3} + 2 + 3x = 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$$

이 때, $x > 3$ 이므로 $3(x-3) > 0$, $\frac{3}{x-3} > 0$

산술평균과 기하평균에 의해

$$\begin{aligned} & 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11 \\ & \geq 2\sqrt{3(x-3) \cdot \frac{3}{x-3}} + 11 \\ & = 2 \cdot 3 + 11 = 17 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $3(x-3) = \frac{3}{x-3}$, 즉 $x = 4$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

3. $a > 0, b > 0$ 일 때, $(2a + b) \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$$(2a + b) \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right) = 16 + 1 + \frac{8b}{a} + \frac{2a}{b}$$

$$a > 0, b > 0 \text{ 이므로 } \frac{8b}{a} + \frac{2a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{8b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} = 8$$

$$\therefore \text{최솟값은 } 17 + 8 = 25$$

4. 길이가 10인 쇠파이프를 n 등분(같은 크기)으로 잘라 다른 장소로 운반하려고 한다. 길이가 x 인 쇠파이프 1개를 운반하는 데 드는 비용이 $250x^2$ 원이고 쇠파이프를 한 번 자를 때 드는 비용이 1000 원이라 할 때, 이 쇠파이프를 잘라서 운반하는 데 드는 최소비용은?

① 6000 원

② 7000 원

③ 8000 원

④ 9000 원

⑤ 10000 원

해설

쇠파이프 한 개의 길이 : $\frac{10}{n}$

$$(\text{총 비용}) = 250 \left(\frac{10}{n} \right)^2 \times n + 1000(n-1)$$

$$= \frac{25000}{n} + 1000n - 1000$$

$$\geq 2 \sqrt{\frac{25000}{n} \times 1000n} - 1000$$

$$= 2 \times 5000 - 1000$$

$$= 10000 - 1000 = 9000$$

5. 다음은 a, b, c, d, x, y, z, w 가 실수일 때, 부등식 $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) \geq (ax + by + cz + dw)^2$ 이 성립함을 증명하는 과정의 일부이다. ㉠, ㉡ 부분에 들어갈 기호가 순서대로 적당한 것은?

[증명] 모든 실수 t 에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$(at - x)^2 + (bt - y)^2 + (ct - z)^2 + (dt - w)^2 \quad \boxed{\text{㉠}} \quad 0$$

이것을 t 에 관하여 정리하면

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)t^2 - 2(ax + by + cz + dw)t + (x^2 + y^2 + z^2 + w^2) \quad \boxed{\text{㉡}} \quad 0$$

따라서 항상 성립하기 위해서는

$$(ax + by + cz + dw)^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) \quad \boxed{\text{㉢}} \quad 0 \dots \dots (\text{이하 생략})$$

① $>, <$

② $\geq, <$

③ $\leq, >$

④ $\leq, \geq$

⑤ $\geq, \leq$

해설

생략